UNIVERSITE PARIS 1 - UFR de GESTION
Thème 1
Algébre linéaire
Licence 2ème année

Exercice 1 :

a) Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils liés ? Quel est le rang de cette famille de vecteurs ?

b) Est ce que la famille de vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de R^2 ? Est ce une base de R^2 ?

Exercice 2 :

On considère R^3muni de la base canonique, soit trois vecteurs :

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Ces trois vecteurs forment ils une base de R^3 ?

b) Le vecteur $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se décompose-t-il de manière unique sur $\{X, Y, Z\}$? Si oui expliciter cette décomposition.

Exercice 3 :

Soit f l'application suivante : $f(x, y, z) = (2x + 3y, y + 2z)$

a) Rappelez ce qu'est une application linéaire. f est elle une application linéaire ?

b) Déterminez le rang et le noyau de f.

c) L'application est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4 :

Soit f l'application définie par $f(x, y) = (2x, 0, x + y)$

a) Rappelez dans le cas général la définition d'une application linéaire, la définition du noyau d'une application linéaire et la définition du rang d'une application linéaire.

b) Vérifiez que f est une application linéaire.

c) L'application peut elle être surjective ?

d) Déterminez le rang de f et vérifiez le résultat de la question précédente.

e) Déterminez le noyau de f.
f) En déduire si f est injective ou non.
g) Ker(f) est il un sous espace vectoriel de R^2 ?