

## chap. 9

## Les équations de récurrence

9.1 n années

$$\text{PNB}(n+k) = f(\text{PNB}(n+k-1), \dots, \text{PNB}(n)) + R(n)$$

$$\Leftrightarrow a_0 \text{PNB}(n+k) + \dots + a_k \text{PNB}(n) = R(n)$$

Trouver la fonction  $f$  tel que:

$$\text{PNB}(n) = f(n)$$

$$\text{PNB}(0)$$

$$\text{PNB}(1)$$

$$\text{PNB}(k-1)$$

$$X_{n+2} + X_{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow X_{p+1} + X_p = 0$$

P93

Preuve de la proposition:

Soit  $X_n^*$  solution particulière de l'équation générale $\forall Z_n$  solution de l'équation générale $Z_n = X_n^* + Y_n$  où  $Y_n$  est solution de l'équation homogène et réciproquement. $(\forall Y_n$  solution de l'équation homogène, $Z_n = X_n^* + Y_n$  est solution de l'équation générale avec second membre)

← Montrons (2)

 $Z_n = X_n^* + Y_n$  avec  $Y_n$  solution de l'équation homogène.

$$\begin{aligned} & a_0 Z_{n+k} + \dots + a_k Z_n \\ &= a_0 (X_{n+k}^* + Y_{n+k}) + \dots + a_k (X_n^* + Y_n) \\ &= \underbrace{(a_0 X_{n+k}^* + \dots + a_k X_n^*)}_{R(n)} + \underbrace{(a_0 Y_{n+k} + \dots + a_k Y_n)}_0 \\ &= \end{aligned}$$

$$= R(n) \quad \text{QED.}$$

(1) Soit  $z_n$  solution de l'équation générale

$$\text{Posons } y_n = z_n - x_n^*$$

$$\begin{aligned} & a_0 y_{n+k} + \dots + a_k y_n \\ &= a_0 (z_{n+k} - x_{n+k}^*) + \dots + a_k (z_n - x_n^*) \\ &= \underbrace{(a_0 z_{n+k} + \dots + a_k z_n)}_{h(n)} - \underbrace{(a_0 x_{n+k}^* + \dots + a_k x_n^*)}_{h(n)} \\ &= 0 \quad \text{QED} \end{aligned}$$

## 9.2 Equation Homogène

$a_k$  et  $a_0$  différents de 0 pour dire qu'elle est d'ordre  $k$

### 9.2.1 :

Soit  $\Omega$  : Ensemble des solutions de

$$a_0 y_{n+k} + \dots + a_k y_n = 0$$

Soient  $u_n$  et  $v_n$  deux éléments de  $\Omega$

Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Montrons que  $\alpha u_n + \beta v_n \in \Omega$

$$\begin{aligned} & a_0 (\alpha u_{n+k} + \beta v_{n+k}) + \dots + a_k (\alpha u_n + \beta v_n) \\ &= \alpha (a_0 u_{n+k} + \dots + a_k u_n) + \beta (a_0 v_{n+k} + \dots + a_k v_n) \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$\Omega$  est un ssev de l'ensemble des suites réelles  $\forall n$

$$a_0 y_{n+k} + \dots + a_k y_n = 0$$

La suite est définie entièrement en fonction du choix des  $k$  premiers paramètres qui sont :

$y_0 \dots y_{k-1}$  (il y a  $k$  éléments :  $k$  degrés de liberté)

Preuve (proposition p 94) (multiplicité 1)

Polynôme en  $n$  degrés  $\alpha = 1 : \left( \sum_{i=1}^k c_i \cdot n^{i-1} \right) \cdot (\lambda_1)^n$

Soit  $\lambda_1$  : solution de l'équation  $P(\lambda) = 0$

↳ de multiplicité 1

can multiplicité 1

$$= \alpha n^{n-1} \lambda_1^n = \alpha n^0 \lambda_1^n = \alpha \lambda_1^n$$

Montrons que  $Y_n = \alpha \lambda_1^n$  est solution de l'équation homogène

$$\begin{aligned} & a_0 Y_{n+k} + \dots + a_k Y_n \\ &= a_0 \alpha \lambda_1^{n+k} + a_1 \alpha \lambda_1^{n+k-1} + \dots + a_k \alpha \lambda_1^n \\ &= \alpha \lambda_1^n [a_0 \lambda_1^k + a_1 \lambda_1^{k-1} + \dots + a_k] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$= P(\lambda_1) = 0$

- Pour une racine double: can multiplicité 2
- $Y_n = \alpha \lambda_1^n$  est toujours solution mais on a aussi
- $Z_n = \beta n \lambda_1^n$   $\beta n^{2-1} \lambda_1^n = \beta n \lambda_1^n$

(pour la preuve, il faut savoir que si  $\lambda_1$  est racine de multiplicité  $n$ , alors  $P(\lambda_1) = 0$ .

$$\begin{aligned} P'(\lambda_1) &= 0 \\ P''(\lambda_1) &= 0 \end{aligned}$$

(A la fois une racine de  $P$  et  $P'$ )  $P^{(n-1)}(\lambda_1) = 0$

- Racine triple: à la fois une racine de  $P$ ,  $P'$  et  $P''$

$$W_n = [\text{polynôme de degré 1 en } n] \times \lambda_1^n$$

P94

Exemple:

a)  $X_{n+3} + X_{n+2} + X_{n+1} + X_n = 0$  ( $\rightarrow$  éq homogène d'ordre 3)

Equation caractéristique:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 0\lambda + 1) = 0$$

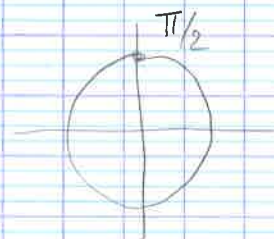
$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - i^2) = 0 \quad \text{car } i^2 = -1$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -i$$

$$\lambda_2 = e^{i\pi/2} \quad \lambda_3 = e^{-i\pi/2}$$

$$\begin{aligned} X_n &= \alpha (-1)^n + \beta 1^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \gamma 1^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \alpha (-1)^n + \beta \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \gamma \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$



b)  $X_{n+3} - 6X_{n+2} + 11X_{n+1} - 6X_n = 2$

Equation homogène:  $X_{n+3} - 6X_{n+2} + 11X_{n+1} - 6X_n = 0$

Equation caractéristique:  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

Une solution évidente:  $\lambda_1 = 1$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$\lambda_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

$\lambda_3 = \frac{5+1}{2} = 3$

⇒ Solution de l'équation homogène:

$X_n = \alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma 3^n$

### 9.2.2

On doit avoir autant de paramètre que l'ordre de l'équation

### 9.3.1

Exemples p 95 :

\*  $X_{n+3} + X_{n+2} + X_{n+1} + X_n = n+2$

(cf avant a) p 94)

Equation homogène :

$X_n = \alpha (-1)^n + \beta \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \gamma \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Le second membre est un polynôme de degré 1

De plus 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique

On cherche donc une solution du type  $an + b = Q(n)$

$$\underbrace{X_{n+3}}_{a(n+3)+b} + \underbrace{X_{n+2}}_{a(n+2)+b} + \underbrace{X_{n+1}}_{a(n+1)+b} + \underbrace{X_n}_{a(n)+b} = n+2$$

⇒  $4an + 4b + 6a = n + 2$

⇒  $\begin{cases} 4a = 1 \\ 4b + 6a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$

Solution particulière :  $X_n^* = \frac{n}{4} + \frac{1}{8}$

Solution de l'équation générale :

$$X_n = \alpha (-1)^n + \beta \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \gamma \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{n}{4} + \frac{1}{8}$$

$$* X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 2$$

Equation homogène :  $X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 0$

Equation caractéristique :  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

1 est solution double.

$$X_n = (an + b) 1^n$$

$$= an + b$$

→ solution de l'éq homogène

Solution particulière : type polynomial

⚠ 1 racine double de l'équation caractéristique :

On cherche une solution du type :

$$X_n^* = Cn^2 \quad n^2 \mathcal{O}(n)$$

$$X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 2$$

$$c(n+2)^2 - 2c(n+1)^2 + cn^2 = 2$$

$$c(n^2 + 4n + 4) - 2c(n^2 + 2n + 1) + cn^2 = 2$$

$$cn^2 + 4cn + 4c - 2cn^2 - 4cn - 2c + cn^2 = 2$$

$$2c = 2 \Leftrightarrow c = 1$$

$$X_n^* = cn^2 = 1 \times n^2$$

Solution particulière :  $X_n^* = n^2$

Solution de l'équation générale :  $Y_n = an + b + n^2$

9.3.2

$$5^n = e^{n \ln 5}$$

si  $\delta > 0$

P 96 ex n°1 :

$$X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 2^n$$

Equation homogène (cf avant)

$$X_n = an + b$$

Solution particulière:  $X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 2^n$

Second membre exponentiel (puissance nème)

2 n'est pas racine de l'équation caractéristique donc  $d=0$

On cherche une solution du type  $c2^n$

$$X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 2^n$$

$$c2^{n+2} - 2c2^{n+1} + c2^n = 2^n$$

$$4c - 4c + c = 1$$

$$\Rightarrow c = 1$$

$\Rightarrow$  Solution particulière:  $X_n^* = 2^n$

Solution générale:  $Y_n = an + b + 2^n$

Sol particulière de la forme  $cn^d 2^n$   
( $d=0$  si  $2^n$  n'est pas racine)

en  $\div$  par  $2^n$

P 96 ex n°2 :

$$X_{n+2} + 2X_{n+1} + 2X_n = 3^n + n \quad (\text{2 genres qui tombe au pascal})$$

Equation homogène:

$$X_{n+2} + 2X_{n+1} + 2X_n = 0$$

Equation caractéristique:  $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$$(\lambda + 1)^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 - i^2 = 0$$

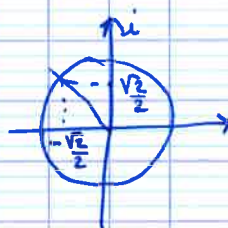
$$(\lambda + 1 - i)(\lambda + 1 + i) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 + i \quad \lambda_2 = -1 - i$$

$$|\lambda_{\pm}| = \sqrt{(-1)^2 + (\pm i)^2} = \sqrt{2}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$= \sqrt{2} e^{3i\pi/4}$$



Solution de l'équation homogène :

$$X_n = (\sqrt{2})^n \left[ \alpha \cos \left( \frac{3n\pi}{4} \right) + \beta \sin \left( \frac{3n\pi}{4} \right) \right]$$

1<sup>ère</sup> solution particulière :

$$X_{n+2} + 2X_{n+1} + 2X_n = 3^n$$

3 n'est pas racine de l'équation caractéristique

On cherche  $X_n^* = c3^n$

$$c3^{n+2} + 2c3^{n+1} + 2c3^n = 3^n$$

en divisant par  $3^n$

$$\rightarrow 9c + 6c + 2c = 1$$

$$\Rightarrow 17c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{17}$$

$$\boxed{X_n^* = \frac{3^n}{17}}$$

2<sup>e</sup> solution particulière :

$$X_{n+2} + 2X_{n+1} + 2X_n = n$$

1 n'est pas solution de l'équation caractéristique

donc  $Y_n^* = an + b$

$$a(n+2) + b + 2[a(n+1) + b] + 2(an + b) = n$$

$$5an + 4a + 5b = n$$

$$\begin{cases} 5a = 1 \\ 4a + 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{4}{25} \end{cases}$$

$$Y_n^* = \frac{n}{5} - \frac{4}{25}$$

Conclusion : solution générale :

$$\boxed{Z_n = (\sqrt{2})^n \left[ \alpha \cos \left( \frac{3n\pi}{4} \right) + \beta \sin \left( \frac{3n\pi}{4} \right) \right] + \frac{3^n}{17} + \frac{n}{5} - \frac{4}{25}}$$

#### 9.4 Résolution complète

exemple :  $X_{n+2} + 2X_{n+1} + X_n = 2^n$   $X_0 = 0$   $X_1 = 1$

Equation homogène :  $X_{n+2} + 2X_{n+1} + X_n = 0$

Equation caractéristique :  $\lambda^2 + 2\lambda + \lambda = 0$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$X_n = (an + b)(-1)^n$$

Solution particulière :  $X_{n+2} + 2X_{n+1} + X_n = 2^n$

Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique

On cherche une solution de type :

$$c 2^{n+2} + 2c 2^{n+1} + c 2^n = 2^n$$

On divise par  $2^n$  :

$$4c + 4c + c = 1 \quad c = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow Y_n = \frac{2^n}{9}$$

Solution de l'équation générale est :

$$Z_n = (an + b)(-1)^n + \frac{2^n}{9}$$

Pour l'équation complète : on a  $z_0 = 0$  et  $z_1 = 1$

$$z_0 = (a \cdot 0 + b)(-1)^0 + \frac{2^0}{9} = 0$$

$$z_1 = (a + b)(-1)^1 + \frac{2^1}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + \frac{1}{9} = 0 \\ -a - b + \frac{2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{9} \\ a = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$W_n = \left( \left( -\frac{2}{3} \right) n - \frac{1}{9} \right) (-1)^n + \frac{2^n}{9}$$

## 9.5 Comportement asymptotique de $U_n$

### 9.5.1 Exemple

Exemple 1: p 97

$$X_n = X_{n-1} + 6X_{n-2} + 8 \quad X_0 = 1 \quad X_1 = -1$$

On pose  $p = n-2$  ou  $n = p+2$

$$X_{p+2} - X_{p+1} - 6X_p = 8$$

$$X_{n+2} - X_{n+1} - 6X_n = 8$$

Équation homogène:  $X_{n+2} - X_{n+1} - 6X_n = 0$

$$\text{Eq. caractéristique: } \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 3$$

$$X_n = a(-2)^n + b(3^n)$$

Solution particulière:  $X_{n+2} - X_{n+1} - 6X_n = 8$

Comme 1 n'est pas racine de l'éq. caractéristique,

On cherche  $X_n = c$

$$c - c - 6c = 8 \Leftrightarrow -6c = 8 \Leftrightarrow c = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Sol. éq générale: } Y_n = a(-2)^n + b(3^n) - \frac{4}{3}$$

mouvement sinusoïdal explosive

Sol. complète:

$$\begin{cases} Y_0 = a + b - \frac{4}{3} = 1 \\ Y_1 = -2a + 3b - \frac{4}{3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{7}{3} \\ -2a + 3b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{7}{3} \\ 5b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$Z_n = \frac{4}{3}(-2)^n + 3^n - \frac{4}{3}$$

Le mouvement sera monotone croissant à partir d'un certain rang et la solution diverge vers  $+\infty$

Exemple 2:

$$3X_n = 3X_{n-1} - X_{n-2} + 1 + n$$

$$3X_{n+2} - 3X_{n+1} + X_n = 1 + (n+2)$$

$$\Leftrightarrow 3X_{n+2} - 3X_{n+1} + X_n = n+3$$

Equation homogène:  $3X_{n+2} - 3X_{n+1} + X_n = 0$

Equation caractéristique:  $3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$

$$\Delta = 9 - 4 \times 3$$

$$= -3 = (\sqrt{3}i)^2$$

$$\lambda_1 = \frac{3+i\sqrt{3}}{6}$$

$$\lambda_2 = \frac{3-i\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$|\lambda_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36}} = \sqrt{\frac{12}{36}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{i\pi/6}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-i\pi/6}$$

$$\text{donc } X_n = \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^n \left[ \alpha \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right]$$

Solution particulière: Comme 1 n'est pas <sup>racine</sup> de l'équation caractéristique,  $Y_n = an + b$

$$3(a(n+2) + b) - 3(a(n+1) + b) + an + b = 3 + n$$

$$an + 3a + b = n + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$Y_n = n$$

Solution de l'équation générale:

$$Z_n = \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^n \left[ \alpha \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right] + n$$

→ Mot sinusoïdal amorti  
pourquoi amorti

Equation complète:

$$\begin{cases} z_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^0 [\alpha] + 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[ \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \beta \right] + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$W_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right] + n$$

Mouvement monotone croissant à partir d'un certain rang, la solution diverge vers  $+\infty$

## 9.6 Système d'équation

### 9.6-2 Equation Homogène

Dém: Par récurrence:

$$n=0 \quad U_0 = A^0 U_0 \quad \text{ok}$$

$$n=1 \quad U_1 = A U_0 \quad \text{cf formule de récurrence pour } n=0$$

$$n \rightarrow 1 \quad \text{on suppose } U_n = A^n U_0$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= A U_n = A A^n U_0 \\ &= A^{n+1} U_0 \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Exemple: P99

$$U_{n+1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} U_n$$

Il faut diagonaliser A

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 4 = (2-\lambda)(6-\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 6$$

$$\text{Trace: } 4+4 = \sum \lambda_i = 8 = 2+6 \quad \text{ok}$$

$$\text{dét: } 16-4 = 12 = \prod \lambda_i \quad \text{ok}$$

$$E_{\lambda_1=2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+2y=0 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} \quad v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2=6} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=2y \Rightarrow y = \frac{x}{2} \Rightarrow v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1<sup>ère</sup> présentation :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \underset{\lambda_1}{\alpha} \underset{\uparrow}{2}^n \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \underset{\lambda_2}{\beta} \underset{\uparrow}{6}^n \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$(\alpha, \beta)$  dépendent des conditions initiales  $(x_0, y_0)$

$$\begin{cases} x_n = \alpha 2^n + \beta 6^n \\ y_n = -\alpha \frac{2^n}{2} + \beta \frac{6^n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \alpha + \beta \\ y_0 = \frac{\beta - \alpha}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L_1 + 2L_2 \begin{cases} x_0 + 2y_0 = 2\beta \\ \alpha = x_0 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{x_0}{2} + y_0 \\ \alpha = \frac{x_0}{2} - y_0 \end{cases}$$

Conclusion :

$$\begin{cases} x_n = \left( \frac{x_0}{2} - y_0 \right) 2^n + \left( \frac{x_0}{2} + y_0 \right) 6^n \\ y_n = \left( \frac{y_0}{2} - \frac{x_0}{4} \right) 2^n + \left( \frac{x_0}{2} + y_0 \right) \frac{6^n}{2} \end{cases}$$

2<sup>e</sup> présentation :

Calcul de  $P^{-1}$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right] \leftrightarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow {}^{L_1 - \frac{1}{2}L_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = P D^n P^{-1} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 6^n \\ -\frac{2^n}{2} & \frac{6^n}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2^n+6^n}{2} & 6^n-2^n \\ \frac{6^n-2^n}{4} & \frac{2^n+6^n}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2^n+6^n}{2} X_0 + (6^n-2^n) Y_0 \\ \frac{6^n-2^n}{4} X_0 + \frac{2^n+6^n}{2} Y_0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} X_n = \frac{2^n+6^n}{2} X_0 + (6^n-2^n) Y_0 \\ Y_n = \frac{6^n-2^n}{4} X_0 + \frac{2^n+6^n}{2} Y_0 \end{cases}$$

9.6.3 Stabilité de l'équilibre

9.6.4 Solution particulière

Rmq : si  $\det(I-A) = 0$

$\Leftrightarrow \det(A-I) = 0$  (la méthode ne fonctionne pas car  $A-I$  pas inversible)  
donc la méthode ne fonctionne pas si 1 est v.p.

Démonstration :

Supposons que 1 n'est pas valeur propre de A

On cherche une solution particulière de  $U_{n+1} = A U_n + B$

Prenons  $U_{n+1} = U_n = C$  alors  $C = AC + B$

$$(I-A)C = B$$

$$C = (I-A)^{-1} B \quad \text{Q.E.D.}$$

Dem:

Supposons  $u_{n+1} = Au_n$  solution de l'équation homogène

$$C = AC + B$$

$$\text{alors } V_n = u_n + C$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= u_{n+1} + C = Au_n + AC + B \\ &= A(u_n + C) + B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = AV_n + B \quad V_n \text{ solution de l'équation générale}$$

Rmq :

- La solution particulière correspond à l'équilibre du système
- Avec  $u_n$  solution de l'équation générale  
 $V_n = u_n - u_E$  est alors solution de l'équation homogène

## 9.7 Diagramme de phase

Exemple P100  $u_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Système homogène:  $u_{n+1} = Au_n$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2/3 \\ 1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2/3-\lambda) - 2/9$$
$$= \frac{2}{3} + \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda - \lambda - \frac{2}{9}$$

$$= \lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + \frac{4}{9}$$
$$\Delta = \frac{25}{9} - \frac{16}{9} = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{5/3 - 1}{2} \quad \lambda_2 = \frac{5/3 + 1}{2}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\text{Trace} : 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\det = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} = \pi \lambda_i$$

$$E_{\lambda_1} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = 4/3$$

$$\begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} \Rightarrow V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \alpha \left( \frac{1}{3} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left( \frac{4}{3} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$\alpha (\lambda_1)^n (V_1) + \beta (\lambda_2)^n (V_2)$

où  $(\alpha, \beta)$  dépendent des conditions initiales

Calculons l'équilibre : pour trouver solut<sup>o</sup> générale

$$X_{n+1} = X_n = X_e$$

$$Y_{n+1} = Y_n = Y_e$$

$$\begin{cases} X_e = X_e + \frac{2}{3} Y_e + 2 \\ Y_e = \frac{1}{3} X_e + \frac{2}{3} Y_e + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_e = -3 \\ -3 = \frac{1}{3} X_e - 2 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_e = -6 \\ Y_e = -3 \end{cases}$$

Solution de l'équation générale :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left(\frac{4}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_0 = \alpha + \beta - 6 \\ y_0 = -\alpha + \beta/2 - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L_1 + L_2 \begin{cases} x_0 + y_0 = \frac{3}{2}\beta - 9 \\ \alpha = x_0 - \beta + 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2}{3}(x_0 + y_0) + 6 \\ \alpha = \frac{1}{3}x_0 - \frac{2}{3}y_0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}x_0 - \frac{2}{3}y_0\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\frac{2}{3}(x_0 + y_0) + 6\right] \left(\frac{4}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Rmq : Ensemble de stabilité de l'équilibre :

X

$$\left\{ (x_0, y_0) \mid \frac{2}{3}(y_0 + x_0) + 6 = 0 \right\}$$

↑ pour que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} y_n \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Car  $\frac{4}{3} > 1$  donc on veut

↓ = 0

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left(\frac{4}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

où  $(\alpha, \beta)$  dépendent des cond<sup>o</sup> initiales

Calculons d'eq  $X_{n+1} = X_n = X_e$   
 $Y_{n+1} = Y_n = Y_e$

$$\begin{cases} X_e = X_e + \frac{2}{3} Y_e + 2 \\ Y_e = \frac{1}{3} X_e + \frac{2}{3} Y_e + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_e = -3 \\ -3 = \frac{1}{3} X_e - 2 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_e = -6 \\ Y_e = -3 \end{cases}$$

Sol<sup>o</sup> de l'eq générale

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left(\frac{4}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X_0 = \alpha + \beta - 6 \\ Y_0 = -\alpha + \beta/2 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1. + 2. \quad X_0 + Y_0 = \frac{3\beta}{2} - 9 \\ \alpha = X_0 - \beta - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{2}{3} (X_0 + Y_0) + 6 \\ \alpha = \frac{1}{3} X_0 - \frac{2}{3} Y_0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3} X_0 - \frac{2}{3} Y_0\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\frac{2}{3} (X_0 + Y_0) + 6\right] \left(\frac{4}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} +$$

Ens de stabilité de l'équilibre

$$= \left\{ (x_0, y_0) / \frac{2}{3}(x_0 + y_0) + 6 = 0 \right\}$$

$$X_{n+1} - X_n = \frac{2}{3} Y_n + 2$$

$$\Delta X = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} Y_n + 2 = 0$$

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{3} X_n - \frac{1}{3} Y_n + 1$$

$$\Delta Y = 0 \Leftrightarrow Y = X + 3$$

$$\begin{aligned} \Delta X > 0 & \Rightarrow \frac{2}{3} Y + 2 > 0 \\ & \Rightarrow Y > -3 \\ \Delta Y < 0 & \Rightarrow \frac{1}{3} X - \frac{1}{3} Y + 1 < 0 \\ & \Rightarrow Y > X + 3 \end{aligned}$$

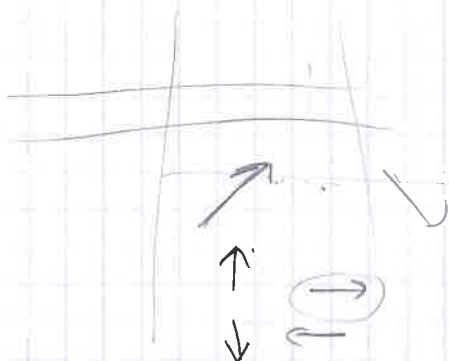
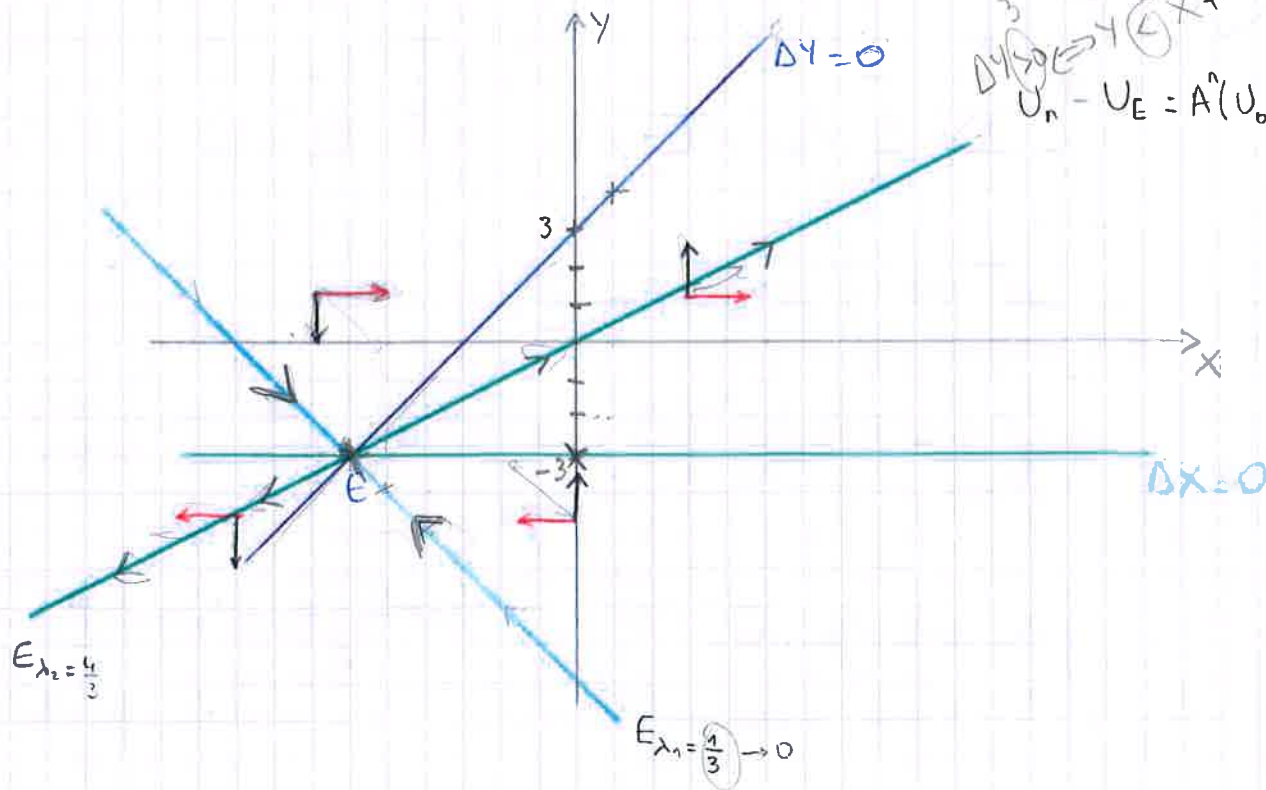
$$Y_{n+1} - Y_n > 0$$

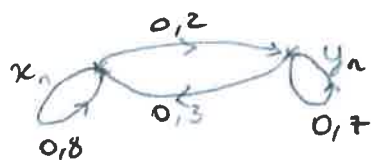
$$\frac{1}{3} X - \frac{1}{3} Y + 1 > 0$$

$$\frac{1}{3} Y < \frac{1}{3} X + 1$$

$$\Delta Y > 0 \Rightarrow Y < X + 3$$

$$U_n - U_E = A^n (U_0 - U_E)$$





$$y_{n+1} = 0,2x_n + 0,7y_n$$

+1  
68

p. 102

Ex 1

proportion d'emploi

proportion sans emploi

$$a) \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,2x_n + 0,7y_n \end{cases}$$

b) C'est un système de Markov car il s'agit bien d'une matrice de transition d'ordre 1

Matrice de Transition

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Somme de chaque colonne = 1

c) la matrice est régulière car elle est positive (et positive)

$$d) \begin{vmatrix} 0,8-\lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0,7-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{8}{10}-\lambda\right)\left(\frac{7}{10}-\lambda\right) - \frac{6}{100}$$

$$= \lambda^2 - \frac{15}{10}\lambda + \frac{56}{100} - \frac{6}{100}$$

$$= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}$$

comme T est une M régulière 1 est vp de multiplicité 1

$$\Delta = \frac{9}{4} - \frac{4}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

ok

$$\lambda_2 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 1$$

car les autres vp ont  $|\lambda| < 1$

Vérification Trace =  $0,8 + 0,7 = 1,5 = \sum \lambda_i$

$$\text{Det} = \frac{56}{100} - \frac{6}{100} = \frac{1}{2} = \prod \lambda_i$$

$$E_{\lambda_1 = \frac{1}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3x + 0,3y \\ 0,2x + 0,2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = -x \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2 = 1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,2 & 0,3 \\ 0,2 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,2x + 0,3y \\ 0,2x - 0,3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ses composantes stochastiques  $\oplus$

$$\sum \text{composantes} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$V_2 = \frac{3}{5} U_2 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha (\lambda_1)^n V_1 + 0 V_2$$

⚠ Pas  $\beta$ .

En identifiant pour  $n=0$

$$\begin{cases} x_0 = \alpha + \frac{3}{5} \\ y_0 = -\alpha + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\alpha = x_0 - \frac{3}{5}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(x_0 - \frac{3}{5}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

$\alpha$

$$\lambda_1^n V_1 + V_2$$

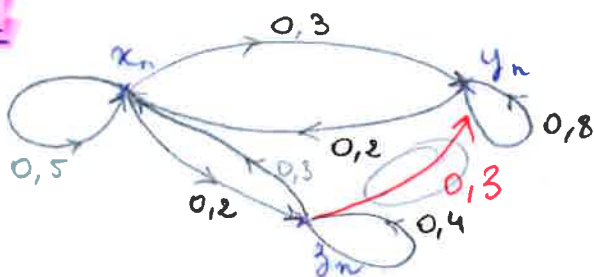
$$\frac{2}{5} \times 20 = 40\%$$

le système tend vers  $\begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$  soit 40% de ~~sans~~-emploi  
sans  
et 60% d'employés

$$\frac{3}{5} \times 20 = \frac{60}{100}$$

**Ex2**

a)



$y_n$  ne peut pas  
devenir  $z_n$



$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\text{où } T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}$$

b) Système récurrent d'ordre 1 avec matrice de transition avec éléments  $\in [0,1]$

$\Sigma \text{ colonne} = 1 \rightarrow M$  de transition

c) Bien que  $T$  ne soit pas positive,  $T^2$  l'est donc la matrice est régulière

d)

72  
69

$$\begin{vmatrix} 0,5-\lambda & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8-\lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0,3 & 0,8-\lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & c_2-c_1 & c_3-c_1 \\ 0,3 & 0,5-\lambda & 0 \\ 0,2 & -0,2 & 0,2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(0,5-\lambda)(0,2-\lambda)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{5} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad \lambda_3 = 1$$

$$\text{Trace} = 0,5 + 0,8 + 0,4 = 1,7 = \sum \lambda_i$$

$$\det = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \end{vmatrix} = 0,2 \begin{vmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,8 & 0,3 \end{vmatrix} + 0,4 \begin{vmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{vmatrix}$$

$$= 0,2(0,06 - 0,24)$$

$$E_{\lambda_1 = \frac{1}{5}} = 0,2$$

$$10 \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x+2y+3z \\ 3x+6y+3z \\ 2x+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x=x \\ y=0 \\ z=-x \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$10 \times \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & -0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2y + 3z \\ 3x + 3y + 3z \\ 2x - z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = -3x \\ z = 2x \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_3} = 1$$

$$10 \times \begin{pmatrix} -0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5x + 2y + 3z \\ 3x - 2y + 3z \\ 2x - 6z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = \frac{1}{3}x \end{cases}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma \text{compo} = 1 + 2 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$V_3 = \frac{3}{10} U_3 = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 6/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \alpha \left( \frac{1}{5} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left( \frac{1}{2} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/10 \\ 6/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha, \beta$  dépendent des conditions initiales

Si  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  est la distribution à l'état initial

$$\begin{cases} x_0 = \alpha + \beta + \frac{3}{10} \\ y_0 = -3\beta + \frac{6}{10} \\ z_0 = -\alpha + 2\beta + \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 0,5-\lambda & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8-\lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1/5 \\ \lambda_2 = 1/2 \\ \lambda_3 = 1 \end{array}$$

$$E_{\lambda_1} = \frac{1}{5} = 0,2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$10 \times \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3x+2y+3z \\ 3x+6y+3z \\ 2x+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -x \end{cases} \quad V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$10 \times \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & -0,1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2y+3z \\ 3x+3y+3z \\ 2x-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -3x \\ z = 2x \end{cases}$$

$$V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_3} = 1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$10 \times \begin{bmatrix} -0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & -0,6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -5x+2y+3z \\ 3x-2y+3z \\ 2x-6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = \frac{1}{3}x \end{cases}$$

$$V_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma \text{ componentes} = 1 + 2 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$V_3 = \frac{3}{10} V_1 = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 6/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{5}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/10 \\ 6/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha, \beta$  dépendent des conditions initiales

Si  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  est la distribution à l'état initial

$$\begin{cases} x_0 = \alpha + \beta + \frac{3}{10} \\ y_0 = -3\beta + \frac{6}{10} \\ z_0 = -\alpha + 2\beta + \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{3}{10} - \frac{y_0}{3} \\ \alpha = x_0 + \frac{y_0}{3} - \frac{5}{10} \end{cases}$$

$$\text{Vérif } \left. \begin{aligned} -\alpha + 2\beta + \frac{1}{10} &= -x_0 - \frac{y_0}{3} + \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2y_0}{3} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{13}{10} - x_0 - y_0 = z_0 \end{aligned} \right\} \text{ ok}$$

Solution

$$\begin{cases} x_n = \left(x_0 + \frac{y_0}{3} - \frac{5}{10}\right) \frac{1}{5^n} + \left(\frac{2}{10} - \frac{y_0}{3}\right) \frac{1}{2^n} + \frac{3}{10} \\ y_n = -3\left(\frac{2}{10} - \frac{y_0}{3}\right) \frac{1}{2^n} + \frac{6}{10} \\ z_n = -\left(x_0 + \frac{y_0}{3} - \frac{5}{10}\right) \frac{1}{5^n} + 2\left(\frac{2}{10} - \frac{y_0}{3}\right) \frac{1}{2^n} + \frac{1}{10} \end{cases}$$