UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE
UFR de GESTION
Examen de Mathématiques
LICENCE 2ème année
JANVIER 2018, Durée : 1h30

Documents et appareils électroniques interdits. Justifiez tous les résultats. Soyez clair(e) et précis(e). Le barème est donné à titre indicatif.

I Système récurrent (8 points)

On étudie le modèle suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n - 2y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + z_n \\ z_{n+1} = -2x_n - 3y_n + 4z_n \end{cases}$$

a) Diagonalisez la matrice A du **système homogène** (On triera les valeurs propres par ordre croissant, on fera les vérifications usuelles et on choisira des vecteurs propres tels que la première composante non nulle soit 1, on calculera P^{-1}).

b) Donner les solutions explicites du **système homogène** en fonction de paramètres.

c) Calculez les précédents paramètres en fonction des conditions initiales x_0, y_0 et z_0.

d) On suppose maintenant que le système a un second membre.

On a donc $X_{n+1} = A.X_n + B$ où $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

Déterminez l'ensemble Ω des points stationnaires de ce **système**. Que représente graphiquement l'ensemble Ω ?

e) Rappelez la formule qui permet de calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on ne fera pas le calcul).

II Optimisation (5,5 points)

On cherche à optimiser la fonction :
$\Psi(x, y, z) = \ln(1 + y^2) - x^2 + xyz$

a) Déterminez les points candidats à l'optimum.

b) Déterminez la hessienne de Ψ ainsi que ses valeurs propres aux points candidats.

c) Quelles conclusions en tirez-vous sur la nature des points candidats ?

d) La fonction Ψ admet elle un maximum global ? un minimum global ? (Justifiez)

III Approximation (5 points)

Soit $f(x, y) = e^{x^2 y} + \ln(1 + xy)$

a) Calculez les dérivées premières et les dérivées secondes.

b) Rappelez la formule d'un développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de plusieurs variables en un point (a,b).

c) En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f en $(1; 0)$.

d) En déduire une valeur approchée de f en $(0.9; 0.1)$.

e) Donnez l'équation du plan tangent à f en $(1; 0)$

IV Question de cours (1,5 points)

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Soit $A = \{V_1, ..., V_n\}$ une famille de vecteurs de l'espace E. On définit l'image de la famille A de vecteurs comme la famille $B = \{u(V_1), ..., u(V_n)\}$. Que doit vérifier la famille B pour être libre ?

Montrez que si B est libre, alors A est aussi libre (on justifiera bien chaque étape de raisonnement).