

Contrôle d'algèbre

Calculatrice, téléphone et matériels de cours/TD interdits
45 minutes

Mardi 19 octobre 2021

Exercice 1 : Question de cours (2 points)

Soit $\mathcal{M} =$

$$\begin{bmatrix} 5 & \pi & \pi \\ 0 & 5 & \pi \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Quelles sont les valeurs propres de \mathcal{M} (sans calcul, mais justifiez)? Écrivez la décomposition de \mathcal{M} sous la forme d'une matrice diagonale \mathcal{D} (à expliciter) et d'une matrice de passage P (à ne pas calculer). Expliquez sans calcul pourquoi \mathcal{M} n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 : Système linéaire paramétré (5 points)

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur de m .

$$\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + 4my = -6 \end{cases}$$

Donnez une interprétation géométrique de vos résultats.

Exercice 3 : Application linéaire (10 points)

Soit $f(x, y, z) = (-2x - 4z, -3y, 2x + 3y + 4z)$.

- Justifiez que f est une application linéaire. Donnez les espaces de départ et d'arrivée.
- Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , exprimez les composantes de f en fonction des vecteurs de \mathcal{B} .
- Quelle est la matrice représentative de f , \mathcal{M}_f dans la base \mathcal{B} ?
- Déterminez $\text{Ker} f$ et sa base. Quelle est sa dimension? Donnez une interprétation géométrique.
- Trouvez le rang de f et une base de $\text{Im } f$.
- f est-elle injective, surjective, bijective?
- Diagonalisez \mathcal{M}_f et déterminez ses espaces propres : On donne $\det \mathcal{M}_f = 0$. Qu'en déduisez-vous? Montrez que $P(\lambda) = \lambda(\lambda - a)(\lambda - b)$, a et b sont à déterminer.

Classez les valeurs propres par ordre décroissant. Les vecteurs propres sont à déterminer tel que la première composante non-nulle soit 1. Exprimer \mathcal{M}_f en fonction d'une matrice diagonale \mathcal{D} et d'une matrice de passage \mathcal{P} . Calculez l'inverse de \mathcal{P} .

Exercice 4 : Fonction de deux variables (3 points)

Soit $f(x, y) = e^{x^3 + \sqrt{y}}$.

- Quel est le domaine de définition \mathcal{D}_f de f ? Représenter \mathcal{D}_f graphiquement.
- Calculez le gradient de f .