

Enseignant : Matthieu Guillo  
TD 2605  
Contrôle du 23 Octobre 2013

Nom :  
Prénom :  
Signature :

**Lisez bien l'énoncé, on justifiera clairement chaque réponse.**

**Cette feuille doit être rendue signée et placée à l'intérieur de la copie.**

**Aucun appareil électronique ne doit être utilisé sous peine d'avoir une note de 0.**

Question de cours : Énoncez le théorème de Rolle

Exercice 1 : diagonalisation de matrice

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1. Trouvez les valeurs propres de cette matrice. Indiquez comment vous passez d'une étape à une autre à chaque fois.
2. Vérifiez les résultats avec les tests classiques.
3. La matrice est-elle diagonalisable? Justifiez.
4. Trouvez les vecteurs propres tels que la première composante non nulle soit entière et positive.
5. Calculez les matrices de la décomposition telles que  $M = PDP^{-1}$  où  $D$  est une matrice diagonale. On rangera les valeurs propres par ordre croissant.

Exercice 2 : développement limité (DL)

1. Écrire la formule du DL à l'ordre 2 d'une fonction  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  au voisinage du point  $(x_0, y_0)$

Soit  $f(x, y) = e^{(x^2+xy)}$  une fonction de 2 variables.

2. Quel est son domaine de définition? Justifiez.
3. Calculer son DL à l'ordre 2 au voisinage du point  $(1, -1)$ . On justifiera bien chaque calcul.

Exercice 3 : application linéaire

$$\text{Soit } f(x, y, z) = (2x + y + z, -4x + y + (-5 - \alpha)z, 4x + 5y + z)$$

1. Justifiez que l'application est linéaire. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée?
2. Trouvez une base de son noyau. Quel est sa dimension?
3. Énoncez le théorème du rang et trouvez le rang de  $f$ .
4. Donnez la définition de l'image d'une application linéaire.
5. Trouvez une base de son image.
6. L'application est-elle injective, surjective, bijective?
7. Écrivez la matrice représentative de cette application linéaire.
8. Pour quelle(s) valeur(s) de  $\alpha$  cette matrice est-elle inversible?