Correction Thème 2 - Algèbre linéaire

Exercice 1.

La multiplication de 2 matrices est possible si le nombre de colonnes de la première matrice est égale au nombre de ligne de la deuxième.

Soient A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$, alors la matrice résultante $C = A \times B$ est une matrice d'ordre mxp

$$\underset{mxp}{C} = \underset{mxn \otimes nxp}{A \times B}$$

(a)

$$\begin{pmatrix}6&2&1\\2&1&0\\0&-1&1\\-8&0&2\end{pmatrix} \; 4\times 3$$

$$\underset{1\times 4}{\begin{pmatrix}1&0&-1&2\end{pmatrix}} \qquad \underset{1\times 3}{\begin{pmatrix}-10&3&4\end{pmatrix}}$$

(b)

$$\begin{pmatrix}1&4&-1\\2&2&0\end{pmatrix} \; 2\times 3$$

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}2&0&1\\1&4&3\end{pmatrix}} \qquad \times$$

(c)

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \; 3\times 1$$

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}6&2&4\\2&3&8\end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix} \; 2\times 1$$

Exercice 2.

E : IR-ev de polynômes de degré ≤ 4. $\Rightarrow P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$

$$u : \underline{E} \longrightarrow \underline{E} \quad (\text{endomorphisme car } F = E)$$

$$P \longrightarrow P + P' \qquad P' = \text{dérivée de } P.$$

(a) On veut montrer que $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ constitue une base de $\underline{E}$.

Petit détour : Vous avez plus l'habitude de voir des espaces vectoriels de "vecteurs de réels" qui proviennent de $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$.

ex : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Si on se donne une famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et on vous demande de montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$, que faites-vous ?

En toute logique, on démontre que c'est libre.

Si la famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est libre $\Rightarrow$ la famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

famille libre $\oplus$ génératrice $\Rightarrow$ base de $\mathbb{R}^3$.

Ici, on applique le même principe. Sauf que les vecteurs de E ici sont des polynômes de degré ≤ 4 :

$$p(X) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i X^i \longrightarrow X^0 = 1$$

$$= \alpha_0 X^0 + \alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 + \alpha_4 X^4$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 + \alpha_4 X^4.$$

Définition libre : Soit $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ une famille de vecteurs.

Si $\mathcal{F}$ est une famille libre $\Rightarrow \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n =$ comme seule solution

Donc ici, il faut que $\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 + \alpha_4 X^4 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_0 = 0$!

Comment montre-t-on cela ? Par l'absurde !

Supposons $\alpha_4 \neq 0 \Rightarrow -\alpha_4 X^4 = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3$

$$X^4 = -\frac{1}{\alpha_4}\left(\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3\right).$$

Or, le $\underbrace{\text{degré de } X^4}_{4} \leq \underbrace{\deg\left(-\frac{1}{\alpha_4}\left(\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3\right)\right)}_{3}$.

ce qui nous amène à $4 \leq 3$, donc impossible. L'hypothès que $\alpha_4 \neq 0$ est donc fausse. $\Rightarrow \alpha_4 = 0$.

Il nous reste donc $\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 = 0$.

Par récurrence, vous pouvez ainsi faire la même démonstrati pour trouver que $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$
$\alpha_4 = 0$

$\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ forme donc une famille libre.

Cette famille contient 5 vecteurs. Quel est la dimension de E ? E : ev des polynômes de deg ≤ 4. Ces polynômes contiennent de manière générale 5 termes.

Donc, dim $E = 5$.

On a une famille libre de 5 vecteurs et un espace vectoriel de dimension 5. La famille est génératrice d'autant plus que tout polynôme $\in E$ s'écrit comme $\sum_{i=0}^{4} \alpha_i X^i$.

La famille est ainsi génératrice, et forme une base de E. C'est même sa base canonique.

Comment trouver la matrice représentative de u ?

Petit détour 2 : Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Comment trouve-t-on M_f, la matrice représentati

On prend des vecteurs de la base canonique ou d'une base de l'espace (i
de départ et on applique f.

Soit $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$M_f = \begin{pmatrix} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \end{pmatrix},$$ exprimés en vecteurs colonnes.

ex : $f(x,y) = (2x+3y\,,\ x-4y)$

$$f(\vec{e_1}) = f(1,0) = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (2\,,\,1) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$ en vecteur colonnes.

$$f(\vec{e_2}) = f(0,1) = f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (3,-4) = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}.$$

$$M_f = \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -4\end{pmatrix}.$$

Même principe ici aussi pour les polynômes.

$\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ forme une base.

$$u(p) = p + p'$$

$$u(1) = 1 + 1' = 1+0 = 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3 + 0\cdot X^4$$

$$u(X) = X + X' = X+1 = 1 + X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3 + 0\cdot X^4.$$

$$u(X^2) = X^2 + (X^2)' = X^2 + 2X = 0 + 2X + X^2 + 0\cdot X^3 + 0\cdot X^4$$

$$u(X^3) = X^3 + (X^3)' = X^3 + 3X^2 = 0\cdot + 0\cdot X + 3X^2 + X^3 + 0\cdot X^4$$

$$u(X^4) = X^4 + (X^4)' = X^4 + 4X^3 = 0 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 4X^3 + X^4$$

autrement dit $u(1) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $u(X) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $u(X^2) = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ ....

$$M_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : $u : E \to E$
$\dim(E) = 5$
M_u est une matrice 5×5

(b) Soit Id la matrice identité de dimension 5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$u - Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(u - Id)^2 = (u - Id) \times (u - Id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(u - Id)^4 = (u - Id)^2 \times (u - Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ & & & \Huge 0 & \end{pmatrix}.$$

$$(u - Id)^5 = (0) \Rightarrow$$ $u - Id$ est bien nilpotente.

$\underline{n = 5}$

(c) $u - Id$ étant nilpotente $\Rightarrow$ 0 est valeur propre de $u - Id$, et c'est la seule valeur propre.

$\Rightarrow$ l'unique valeur propre de u est 1.

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0.4 & 1 \\ -0.2 & 0{,}3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \underset{\overset{\parallel}{\text{Identité}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B est l'inverse à droite de A.

Remarque :
$AB \neq BA$
car de manière générale, la multiplication de matrice n'est pas commutative

Exercice 4

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Petit détour 3 : Comment résout-on un problème de ce type ?

Nous avons ici un système d'équation paramétré par $m \in \mathbb{R}$. En fonction des valeurs de m, ce système peut avoir une infinité de solutions, une solution unique ou alors pas du tout de solution. Il faut déterminer les valeurs de m qui amènent à des solutions dégénérées (∞ de solutions). Il faut calculer les valeurs critiques de m soit en appliquant le pivot de Gauss jusqu'à tomber sur des conditions sur m dans la dernière équation soit en ré-écrivant le système d'équations sous forme matricielle et en calculant le déterminant de la matrice

Ré-écriture sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2 \\ 0 \\ m+2 \end{pmatrix} \iff A\vec{X} = \vec{B}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

[**Rappel** : le déterminant ne change pas par combinaison de lignes ou de colonnes.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 2+m & 0 & 3-m \\ 2+m & 0 & 3+m-m^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + mL_1 \end{matrix}.$$

$$= - \begin{vmatrix} 2+m & 3-m \\ 2+m & 3+m-m^2 \end{vmatrix}$$ en développant par rapport à la 2ème colonne.

$$= (2+m) \begin{vmatrix} 1 & 3-m \\ 1 & 3+m-m^2 \end{vmatrix} = (2+m)\left(3+m-m^2-(3-m)\right)$$

$\det A = (2+m)(2m - m^2) = m(2+m)(2-m)$.

Les valeurs critiques de m sont les valeurs qui annulent $\det A$. $\Rightarrow$ $m(2+m)(2-m) = 0$

$$m = -2,\ 0,\ 2.$$

Si $m=0$ ou $m=-2$ ou $m=2$ $\Rightarrow$ $\det A = 0$ $\Rightarrow$ des cas dégénérés.

Si $m \neq 0$ et $m \neq -2$ et $m \neq 2$ $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$ $\Rightarrow$ une solution unique car A est inversible, autrement dit

$$A\vec{X} = \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = A^{-1}\vec{B}$$

Plusieurs cas à étudier : ① $m \neq 0$ et $m \neq -2$ et $m \neq 2$.

② $m = -2$

③ $m = 0$

④ $m = 2$.

<u>1^{er} cas</u> : $m \neq 0$ et $m \neq -2$ et $m \neq 2$.

On a une solution unique que l'on peut calculer par la <u>méthode de Cramer</u>. [On remplace la colonne correspondant à la variable x, y ou z dans A et on calcule le déterminant correspondant que l'on divise ensuite par $\det A$]

x = 1ère colonne $\quad y$ = 2ème colonne $\quad z$ = 3ème colonne.

$$\Delta x = \det A_x = \begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1-m \\ 0 & -1 & 2 \\ m+2 & -m & 3 \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 1^{+} & 1 & 1-m \\ 0^{-} & -1 & 2 \\ 1^{+} & -m & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (m+2)\left[\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -m & 3 \end{vmatrix}}_{-3+2m} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1-m \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{2+1-m}\right] = (m+2)m.$$

↑ on développe par rapport à la 1ère colonne.

$\det A = m(m-2)(m+2)$.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & m+2 & 1-m \\ 1+m & 0 & 2 \\ 2 & m+2 & 3 \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1^{-} & 1-m \\ 1+m & 0^{+} & 2 \\ 2 & 1^{-} & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (m+2)\left[-\begin{vmatrix} 1+m & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1-m \\ 1+m & 2 \end{vmatrix}\right]$$

8

$$= (m+2)\left[-(3+3m-4) - (2-(1+m)(1-m))\right]$$

$$= (m+2)\left[1-3m-2+1-m^2\right] = m(m+2)(-3-m)$$

$$= -m(m+2)(m+3)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m+2 \\ 1+m & -1 & 0 \\ 2 & -m & m+2 \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^+ \\ 1+m & -1 & 0^- \\ 2 & m & 1^+ \end{vmatrix}$$

$$= (m+2)\left[\underbrace{\begin{vmatrix} 1+m & -1 \\ 2 & -m \end{vmatrix}}_{-(m+m^2)+2} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+m & -1 \end{vmatrix}}_{-1-1-m}\right]$$

$$= (m+2)\left(-m + m^2 + \cancel{2} - \cancel{2} - m\right) = (m+2)(-2m-m^2)$$

$$= -m(m+2)(m+2).$$

$$x = \frac{\Delta x}{\det A} = \frac{m(m+2)}{m(m+2)(m-2)} = \frac{1}{m-2}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\det A} = \frac{-m(m+2)(m+3)}{m(m+2)(m-2)} = -\frac{(m+3)}{m-2} = \frac{-m-3}{m-2}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\det A} = \frac{-\cancel{m}(\cancel{m+2})(m+2)}{\cancel{m}(\cancel{m+2})(m-2)} = \frac{-m-2}{m-2}$$

Solution unique $= \left\{\left(\frac{1}{m-2}, \frac{-m-3}{m-2}, \frac{-m-2}{m-2}\right)\right\}.$

2ème cas : $m=0 \Rightarrow \begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+3z=2 \end{array} \iff \begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+3z=2 \end{array}$

On pose z en paramètre.

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2-3z}{2} \\ -\left(\frac{2-3z}{2}\right) - z - 2 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

3ème cas : $m = -2$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{pivot de}} S = \left\{ y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

4ème cas : $m = 2$

$$\begin{array}{l} x + y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 4 \end{array} \iff \begin{array}{ll} x + y - z = 4 & \\ -4y + 5z = -12 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L \\ -4y + 5z = -4 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L \end{array}$$

Les 2 dernières equations ne sont pas compatibles. Il n'y a donc pas de solutions. $S = \phi$

Exercice 5

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}.$$ M est inversible ssi $\det M \neq 0$.

$$\det M = \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 2a & a+x \\ 0 & 0 & a+x \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array}$$

triangulaire supérieure.

$$= 2a \times a \times (x+a) = 2a^2(x+a).$$

$$\det M \neq 0 \Rightarrow 2a^2(x+a) \neq 0 \iff 2a^2 \neq 0 \text{ ou } x+a \neq 0$$
$$a \neq 0 \text{ ou } x \neq -a$$

Calcul de M^{-1} par la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & a & a & 1 & 0 & 0 \\ -a & a & x & 0 & 1 & 0 \\ -a & -a & x & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} L_1/a \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & x+a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x+a & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} L_1 - L_2/2a \\ L_2/2a \\ L_3 . \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{a-x}{2a} & 1/2a & -1/2a & 0 \\ 0 & 1 & \frac{x+a}{2a} & 1/2a & 1/2a & 0 \\ 0 & 0 & x+a & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Voir page suivante.}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} L_1 \overset{-(a-x)}{\cancel{\ \ }} L_3/_{2a(x+a)} \\ L_2 - L_3/_{2a(x+a)} \\ L_3/_{x+a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2a} - \frac{(a-x)}{2a(x+a)} & -\frac{1}{2a} - 0 & \frac{x-a}{2a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} - 0 & 0 - \frac{1}{2a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{x+a} & 0 & \frac{1}{x+a} \end{array}\right).$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{M^{-1}}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} - \frac{(a-x)}{2a} & -\frac{1}{2a} & \frac{x-a}{2a(x+a)} \\ 0 & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} \\ \frac{1}{x+a} & 0 & \frac{1}{x+a} \end{pmatrix}$$

Exercice 6

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) M est diagonalisable car c'est une matrice à coefficients réels et <u>symétrique</u> ($\Rightarrow {}^tM = M$).

(b) Calcul des valeurs propres de M :

- calcul du polynôme caractéristique $P(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$P(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \left|\begin{array}{ccc} a-\lambda & b & b \\ b & a-\lambda & b \\ b & b & a-\lambda \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$= \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{} \begin{vmatrix} a+2b-\lambda & a+2b-\lambda & a+2b-\lambda \\ b & a-\lambda & b \\ b & b & a-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a+2b-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a-\lambda & b \\ b & b & a-\lambda \end{vmatrix}$$

$$C_1 - C_3$$

$$= \begin{array}{ccc} \overset{\shortparallel}{C_3} & C_2 = C_1 - C_2 & C_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+b-a & b \\ a-\lambda-b & a-\lambda-b & a-\lambda \end{vmatrix} \Bigg\} \text{ triangulaire inférieure}$$

$$= (a+2b-\lambda) \times 1 \times (\lambda+b-a) \times \overbrace{(a-\lambda-b)}^{-(\lambda+b-a)}.$$

$$p(\lambda) = -(a+2b-\lambda)(\lambda+b-a)^2$$

Les valeurs propres sont les racines de $P(\lambda)$:

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow -(a+2b-\lambda)(\lambda+b-a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a+2b-\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad (\lambda+b-a)^2 = 0$$

$$\lambda = a+2b \qquad \lambda = a-b \text{ (racine doubl}$$

Valeurs propres sont $\lambda_1 = a+2b \quad \lambda_2 = a-b \quad \lambda_3 = a-b$.

Vérification : $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = a+2b + a-b + a-b = 3a$ | OK.

$Tr(M) = a+a+a = 3a$.

OK | $\prod_{i=1}^{3} \lambda_i = (a+2b)(a-b)^2$

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \cancel{(a+2b)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b-a & b \\ b & a-b & a \end{vmatrix}} \quad (a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 \\ b & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+2b)(a-b)^2$$

(c) Calcul des espaces propres :

$\lambda_1 = a+2b$. Les espaces propres sont générés par les vecteurs propres : $M\vec{V} = \lambda\vec{V}$ $\quad \vec{V}$ = vecteur propre.

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b & b \\ b & a-\lambda & b \\ b & b & a-\lambda \end{pmatrix}\vec{V} = \vec{0} \qquad \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

à trouver.

$$M\vec{V} - \lambda\vec{V} = \vec{0}$$

$$M\vec{V} - \lambda\vec{V}I = \vec{0}, \quad I = \text{matrice identité}$$

$$(M-\lambda I)\vec{V} = \vec{0}$$

$\lambda = \lambda_1 = a+2b$

$$\begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2bx + by + bz = 0 \\ bx - 2by + bz = 0 \\ bx + by - 2bz = 0 \end{cases}.$$

A partir de L_1, $x = \frac{by+bz}{2b} = \left(\frac{y+z}{2}\right)\frac{b}{b}$.

En supposant que $b \neq 0$ (sinon M est déjà diagonal), $b/b = 1$ et $x = \frac{y+z}{2}$.

De L_2, $y = \frac{x+z}{2}$ et de L_3, $z = \frac{x+y}{2}$.

x est le milieu de y et z, y est le milieu de x et z et z est le milieu de x et y $\Rightarrow x = y = z$.

$$E_{\lambda_1} = \left\{x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}\right\} = \overrightarrow{vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}. \quad \vec{V}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = a-b$

$$\begin{pmatrix}b & b & b\\ b & b & b\\ b & b & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{aligned} bx + by + bz &= 0\\ x + y + z &= 0\\ x &= -y-z\\ y &= y\\ z &= z.\end{aligned}$$

$$E_{\lambda_2} = \left\{y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \overrightarrow{vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{V}_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(d) La matrice de passage P est la matrice définie telle que $M = PDP^{-1}$

P est composée des vecteurs propres et D contient les valeurs propres. Il faut ranger les $\vec{V}_i$ dans le même ordre que les λ_i.

$$D = \begin{pmatrix}a+2b & 0 & 0\\ 0 & a-b & 0\\ 0 & 0 & a-b\end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \times {}^t Co(P).$$

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Si A est singulière => det A = 0

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + (-1) = 0$$

Comme $\det A = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 0$ => une des valeurs propres est égale à 0.

(b) Calcul des valeurs propres :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix}.$$

$$= -\lambda \left[\lambda(2+\lambda) + 1\right] - (-2-\lambda+1) - \lambda - 1$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -\lambda(\lambda+1)^2$$

$p(\lambda) = 0$ => $\lambda = 0$ ou $(\lambda+1)^2 = 0$

$\lambda = -1$.

−1 est valeur propre de multiplicité 2 et 0 est valeur propre simple.

(c) Pour que A soit diagonalisable, il faut que E_λ associé à −1 soit de dimension 2.

$\underline{\lambda = -1}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ $\quad \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ = vecteur propre.

$$x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y.$$

$$E_{\lambda=-1} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \quad \dim(E_{\lambda=-1}) = 2.$$

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} y - z &= 0 & \quad y &= z \\ x - z &= 0 & \quad x &= z \\ x + y - 2z &= 0 & \quad 2z - 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$E_{\lambda=0} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}. \quad \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = PDP^{-1} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & 0 & (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} & 2 \times (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.

$$f_\alpha(x,y,z) = (x+2y-2z,\ 2x+y+\alpha z,\ 2x+2y-3z),\quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) f_α est linéaire car chacune de ses composantes est linéaire et de la forme $ax+by+cz$.

(b) $\operatorname{Ker} f_\alpha = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid f_\alpha(\vec{u}) = \vec{0}\}$. On cherche tous les vecteurs dont l'image par f_α est le vecteur nul. On résout donc

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0 & L_1 \\ 2x+y+\alpha z &= 0 & L_2 \\ 2x+2y-3z &= 0 & L_3 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} & & x+2y-2z &= 0 \\ & L_2-2L_1 & -3y+(\alpha+4)z &= 0 \\ & L_3-2L_1 & -2y+z &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} & & x+2y-2z &= 0 \\ & -L_2/3 = L_2' & y - \left(\frac{\alpha+4}{3}\right)z &= 0 \\ & L_3+2L_2' & -\frac{5-2\alpha}{3}\, z &= 0 \end{aligned}$$

Deux cas de figures en fonction de α :

Si $-5-2\alpha = 0$, $\alpha = -5/2$ ou $-5-2\alpha \neq 0$, $\alpha \neq -5/2$.

Le système devient ainsi

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0 \\ y - \frac{1}{2}z &= 0 \Leftrightarrow 2y - z = 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

y paramètre $\Rightarrow x = -2y + \overset{=4y}{2z}$
$= 2y$.

$$\operatorname{Ker} f_\alpha = \left\{ y\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\dim(\operatorname{Ker} f_\alpha) = 1$

f_α <u>n'est pas injective.</u>

$\Rightarrow z = 0$ à partir de L_3
$y = 0$
$x = 0$

$\operatorname{Ker} f_\alpha = \{\vec{0}\}$.

$\dim(\operatorname{Ker} f_\alpha) = 0$

f_α est <u>injective</u>.

Théorème du rang : $\operatorname{rang} f_\alpha + \dim(\operatorname{Ker} f_\alpha) = \dim \mathbb{R}^3$.

$\operatorname{rang} f_\alpha = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$ (espace d'arrivée)
f_α <u>n'est pas surjective</u>, donc <u>pas bijective</u>.

$\operatorname{rang} f_\alpha = 3$.
f_α est <u>surjective</u> et ainsi <u>bijective</u> (car inj + surj).

(c) Supposons $\alpha = -2 \Rightarrow f_\alpha$ est bijective.

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad f_{\alpha=-2}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+2y-2z \\ 2x+y-2z \\ 2x+2y-3z \end{pmatrix}.$$

f étant bijective $\Rightarrow$ l'application réciproque est définie et ainsi M_f est inversible, $\det M_f \neq 0$.

(d) Calcul des valeurs propres.

$$P(\lambda) = \det(M_f - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = +1 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

$\mathrm{Tr}\, M = 1+1-3 = -1 \qquad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1+\cancel{1}-1-1 = -1.$

$\det M = 1. \qquad \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = -1 \times -1 \times 1 = 1.$

(e) $E_{\lambda=-1}$? $\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ en posant $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$z = x+y.$

$$E_{\lambda=-1} = \cancel{\text{vect}}\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$E_{\lambda=1} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\vec{V} = \vec{0} \iff \begin{matrix} y-z=0 \\ x-z=0 \\ x-y-2z=0 \end{matrix} \qquad x=y=z$$

$$E_{\lambda=1} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

La matrice est diagonalisable car la dimension des espaces propres associés est égale à la multiplicité des valeurs propres : multiplicité de $-1 = 2 = \dim(E_{\lambda=-1})$

$1 = 1 = \dim(E_{\lambda=1})$.

f) $M = PDP^{-1}$ $\quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} ? \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{-1 \quad 0 \quad 1} \end{array}\right) \underset{L_3 - L_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_3 + L_1 \\ L_3 + L_2 \\ -L_3 \end{array} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(g) $$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{n+1} + 1 & (-1)^n - 1 \\ (-1)^{n+1} + 1 & 1 & (-1)^n - 1 \\ (-1)^{n+1} + 1 & (-1)^{n+1} + 1 & 2 \times (-1)^n - 1 \end{pmatrix}.$$

$$f^{46}(2,1,2) = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f(2,1,2).$$

$$= M_f^{46} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En posant $n = 46$, $M^{46} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f^{46}(2,1,2) = (2,1,2)$$

h) $$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + 2Y_n - 2Z_n \\ Y_{n+1} = 2X_n + Y_n - 2Z_n \\ Z_{n+1} = 2X_n + 2Y_n - 3Z_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

écriture sous forme matricielle

$$\vec{U}_{n+1} = M \vec{U}_n.$$

Commençons la récurrence : $\vec{U}_1 = M\vec{U}_0$.

$$\vec{U}_2 = M\vec{U}_1 = M \times M\vec{U}_0 = M^2\vec{U}_0$$

$$\Rightarrow \vec{U}_n = M^n\vec{U}_0 \qquad \vec{U}_0 = \begin{pmatrix} \cancel{X}_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^n = PD^nP^{-1}$$

$$\Rightarrow \vec{U}_n = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n - 1 \\ (-1)^{n+1}+1 & 1 & (-1)^n - 1 \\ (-1)^{n+1}+1 & (-1)^{n+1}+1 & 2\times(-1)^n - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 0 + (-1)^n - 1 \\ (-1)^{n+1}+1 + 0 + (-1)^n - 1 \\ (-1)^{n+1}+1 + 0 + 2\times(-1)^n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \\ (-1)^n \end{pmatrix}.$$

car ici on avait calculé explicitement M^n, sinon ....

<u>Petit détour 4</u> : $\vec{U}_n = M^n\vec{U}_0 = PD^nP^{-1}\vec{U}_0$

P contient les 3 vecteurs propres $P = (\vec{V}_1\ \vec{V}_2\ \vec{V}_3)$.

On calcule $P^{-1}\vec{U}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$PD^n = (\vec{V}_1\ \vec{V}_2\ \vec{V}_3) \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left((-1)^n\vec{V}_1\ (-1)^n\vec{V}_2 \cdot 1\vec{V}\right.$$

$$1\times 3 \qquad\qquad 3\times 3$$

$$\vec{U}_n = \underbrace{\left((-1)^n\vec{V}_1\ (-1)^n\vec{V}_2\ \vec{V}_3\right)}_{PD^n} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P^{-1}\vec{U}_0} = (-1)^n\vec{V}_1 = (-1)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \\ (-1)^n \end{pmatrix}$$

ce qui nous amène au même résultat que précédemment