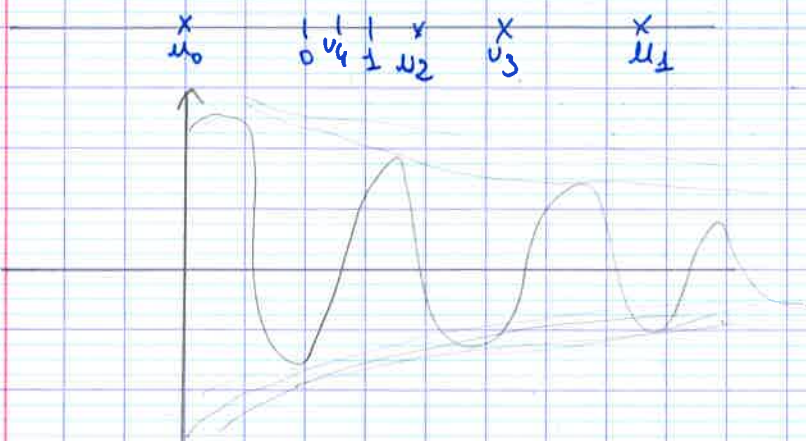


chapitre 8

Les suites

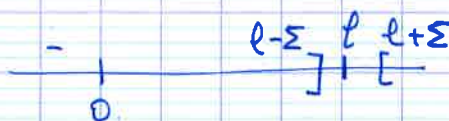
$$u_n = \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow u_n \in \mathbb{R}$$



$$u_{n+1} = f(u_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{ssi}$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$$

$$\{u_n / n \geq N\}$$

$$u_n \text{ diverge vers } +\infty \text{ ssi}$$

$$\forall n > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \{u_n / n \geq N\}$$

$(-1)^n$ ne converge pas

$$u_{2n+1}$$

$$u_3$$

$$u_1$$

$$-1$$

$$0$$

$$1$$

$$u_{2n}$$

$$u_2$$

$$u_0$$

$\sum c_i$ on ne pt inclure ds 1 intervalle et 1 et -1

Example : $u_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n!}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

$$n \geq 2 \quad n+1 \geq 3$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{3} < 1$$

Donc $u_n \rightarrow 0$
 $n \rightarrow \infty$

Example p88 $u_n = \frac{2^n}{n!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{n! (n+1)^{n+1}}{(n+1)! 2^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1) 2^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{2^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k}$$

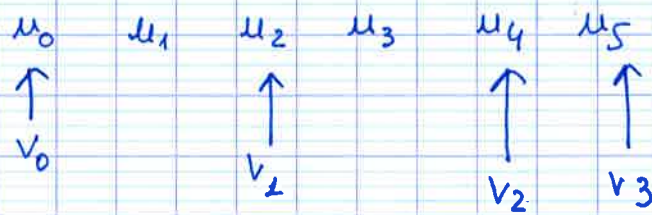
Supposons $n \geq 1$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{1}{n^k}$$

$$= 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k}$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k} > \frac{2}{1} > 1$$

la suite est divergente vers $+\infty$
 Par exemple



v_n est extraite de u_n

exercice

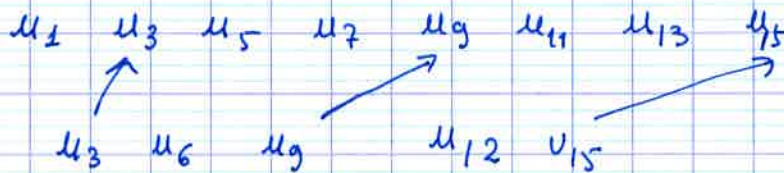
p 88

2) Mg si $u_{2n} \rightarrow u_{2n+1}$ et u_{3n} convergent alors u_n converge.
 $(-1)^n$

Supposons $u_{2n} \rightarrow l_1$

$u_{2n+1} \rightarrow l_2$

$u_{3n} \rightarrow l_3$



Si u_{2n} converge vers l_1 $u_{2(3n)} = u_{6n}$ converge vers l_1

Si u_{3n} converge vers l_3 $u_{3(2n)} = u_{6n}$ converge vers l_3
 donc $l_1 = l_3$

u_{6n+3}

$u_{2(3n+1)+1} = u_{6n+3} \rightarrow l_2$

$u_{3(2n+1)} = u_{6n+3} \rightarrow l_3$

donc $l_2 = l_3$

Conclusion $l_1 = l_2$ d'après l'exo 1 u_n converge vers cette limite comme aux 3 suites.

Une suite de Cauchy est une suite dont le pas
($|u_i - u_j|$) tend vers 0 quand, $i, j \geq N$
 N atteint vers $+\infty$

Preuve Propriété

Soit $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$

$$i \geq N \Rightarrow |u_i - l| \leq \varepsilon/2$$

$$j \geq N \Rightarrow |u_j - l| \leq \varepsilon/2$$

$$\begin{aligned} |u_i - u_j| &= |u_i - l + l - u_j| \\ &\leq |u_i - l| + |l - u_j| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

donc la suite convergente est de Cauchy.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$|u_n - 1| = \left| \frac{n+2}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{On veut } \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \quad \frac{1}{\varepsilon} \leq n+1$$

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad \text{Si } n \geq E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$$

Conclusion : Soit $\varepsilon > 0$

$$\exists N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - 1| \leq \varepsilon \quad \text{donc effectivement } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

$u_n = f(n)$
 $u_{n+1} = f(u_n)$

Supposons f croissante

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Supposons $u_0 \leq u_1$ et montrons par récurrence que

$$\forall n, u_n \leq u_{n+1}$$

$$n=0 \quad u_0 \leq u_1$$

$$n \mapsto n+1 \quad u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \quad \text{QED!}$$

De m si $u_1 \leq u_0$ on peut montrer par récurrence que $\forall n, u_{n+1} \leq u_n$ (suite décroissante)

f croissante $\Rightarrow u_n$ monotone

(le signe de $u_1 - u_0$ indique si u_n croissante (>0)

ou u_n décroissante (<0)

$$\forall n, u_{2n}$$

$$\forall n+1 = u_{2(n+1)} = u_{(2n+1)+1} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}))$$

La suite u_{2n} est une suite récurrente définie par $f \circ f$.

Supposons $f \in C'$ et f décroissante

$$(f \circ f)'(x) = f'(x) \times f'(f(x))$$

$$\underbrace{\begin{matrix} (+) & (+) \\ \oplus \end{matrix}}$$

$\rightarrow f \circ f$ croissante

$\rightarrow$ donc u_{2n} monotone puisque $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$

Remarque la démo est la m pour u_{2n+1}

Supposons $u_n \rightarrow l$

u_{n+1} est une suite extraite de u_n donc elle converge vers l

$u_{n+1} = f(u_n)$ si f continue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$$

Conclusion $l = f(l)$

$$\begin{matrix} (f \circ f)' \\ f' \circ f' \end{matrix}$$

Supposons $u_0 \neq 0$

$x=0$ u_0 et ensuite 0

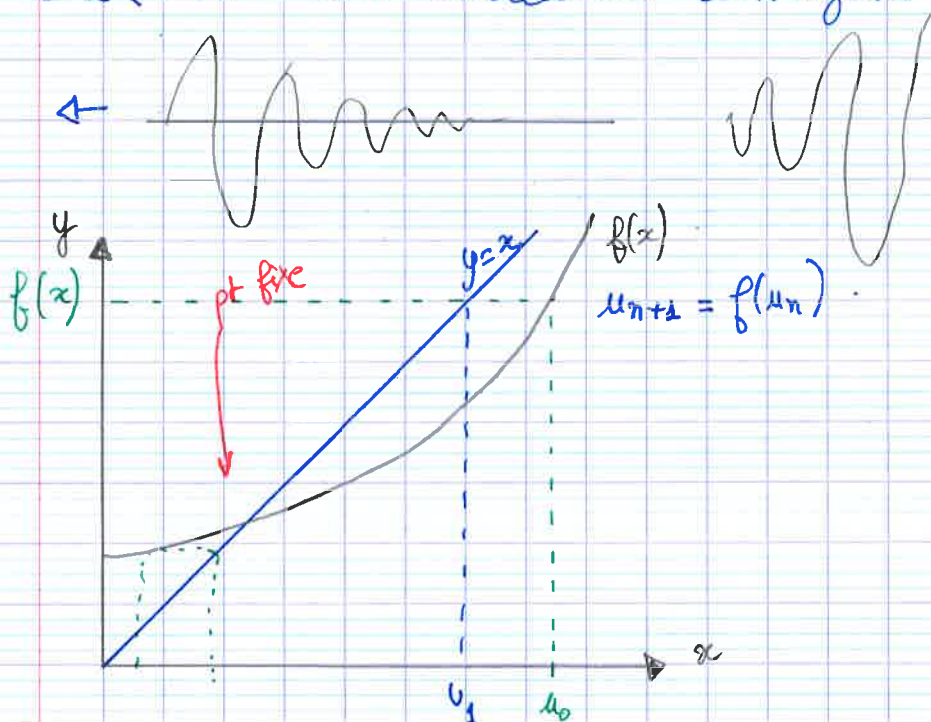
$0 < x < 1$ (si $u_0 > 0$) u_n décroissante minorée par 0
(si $u_0 < 0$) u_n croissante majorée par 0
elle converge vers 0.

$x=1$ suite constante $\pm u_0$

$x > 1$ Si $u_0 > 0$ (u_n) croissante divergente vers $+\infty$

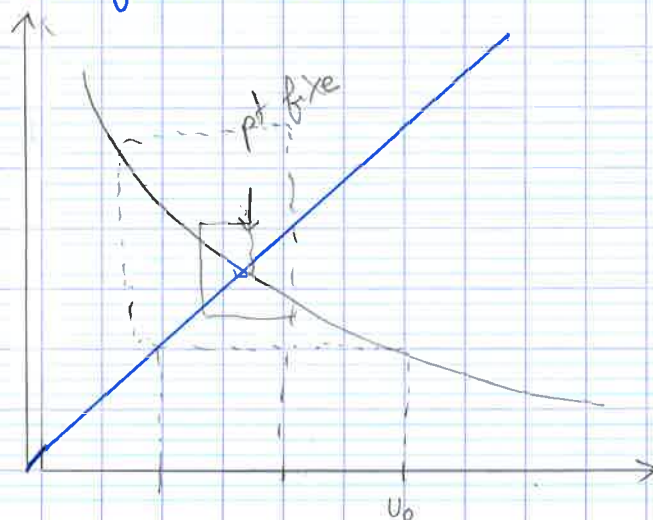
Si $u_0 < 0$ (u_n) décroissante divergente vers $-\infty$

$-2 < x < 0$ Suite oscillatoire convergente vers 0



Suite croissante qui converge vers le pt fixe.

Cas fonction décroissante



p91

$$u_{n+1} \geq 0$$

Exercice 1 : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n + 2}$

Intro $\rightarrow u_n$ est bien définiSupposons $u_0 > 0$ et montrons $\forall n, u_n \geq 0$.

Par récurrence

$n=0$ $u_0 > 0 \geq 0$ ok

au rang $n+1$: $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n + 2}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n + 2} \geq 0 \text{ car signe de } a$$

$$u_n \geq 0 \text{ QED!}$$

1) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+2) - (x^2+x+1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 5x + 2 - x^2 - x - 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$$

$$\Delta = 16 - 4 = 12 \quad x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} < 0$$

$$x_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2} < 0$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow u_n \text{ monotone}$$

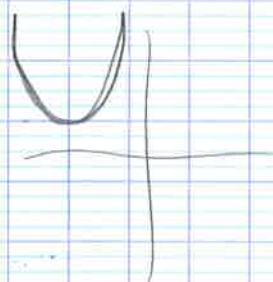
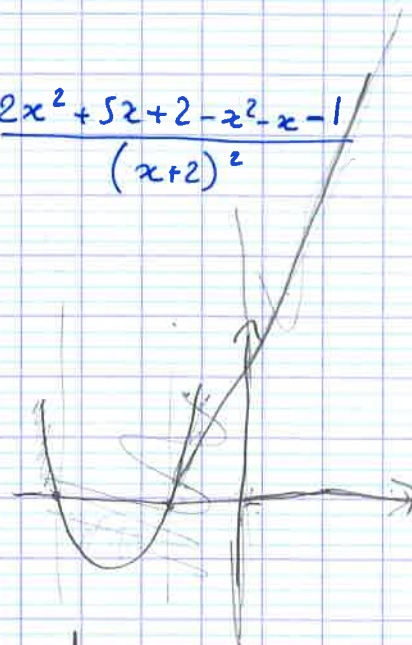
2) $f(x) = x \quad \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} = x$

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x = 1$$

$l=1$

3) $f(x) - x = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} - x = \frac{1}{x + 2} (x^2 + x + 1 - x^2 - 2x)$

$$= \frac{1}{x + 2} (1 - x)$$

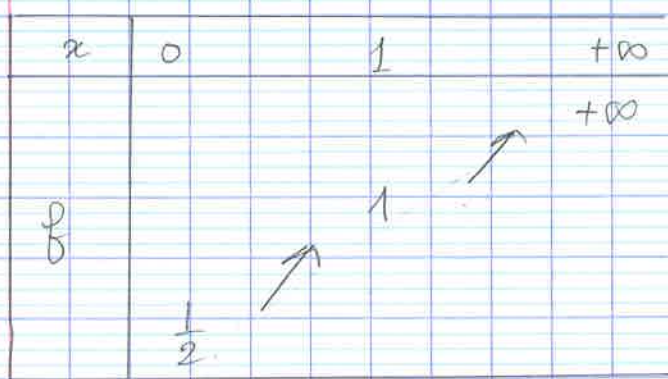


Donc si $u_0 > 1$

$f(u_0) - u_0 \leq 0$ donc u_n décroissante.

Si $0 < u_0 < 1$

$f(u_0) - u_0 \geq 0$ donc u_n est croissante majorée par 1.
donc u_n converge vers 1



Soit $x > 1$

$$f([0, x]) \subset [\frac{1}{2}, f(x)] \\ \subset [0, x]$$

Soit $u_0 > 0$

Prenons $x > u_0$ et $x > 1$

Prenons $I = [0, x]$ c'est un intervalle stable

$$f(I) \subset I$$

$$|f'(x)| = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 4x + 4} < 1 \text{ sur } [0, x]$$

$|f'(x)|$ atteint son Max

$$\Rightarrow \exists M \quad |f'(x)| \leq M < 1$$

D'après le th de convergence

u_n converge vers un pt fixe de I

$\Rightarrow u_n$ converge vers $l=1$

$l=1$

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n + 2}$$

Supposons $u_0 > -2$ $u_1 = \frac{u_0^2 + u_0 + 1}{u_0 + 2} > 0$ $\Delta = 1 - 4 = -3$

On est donc ramené au pbm précédent et la suite converge