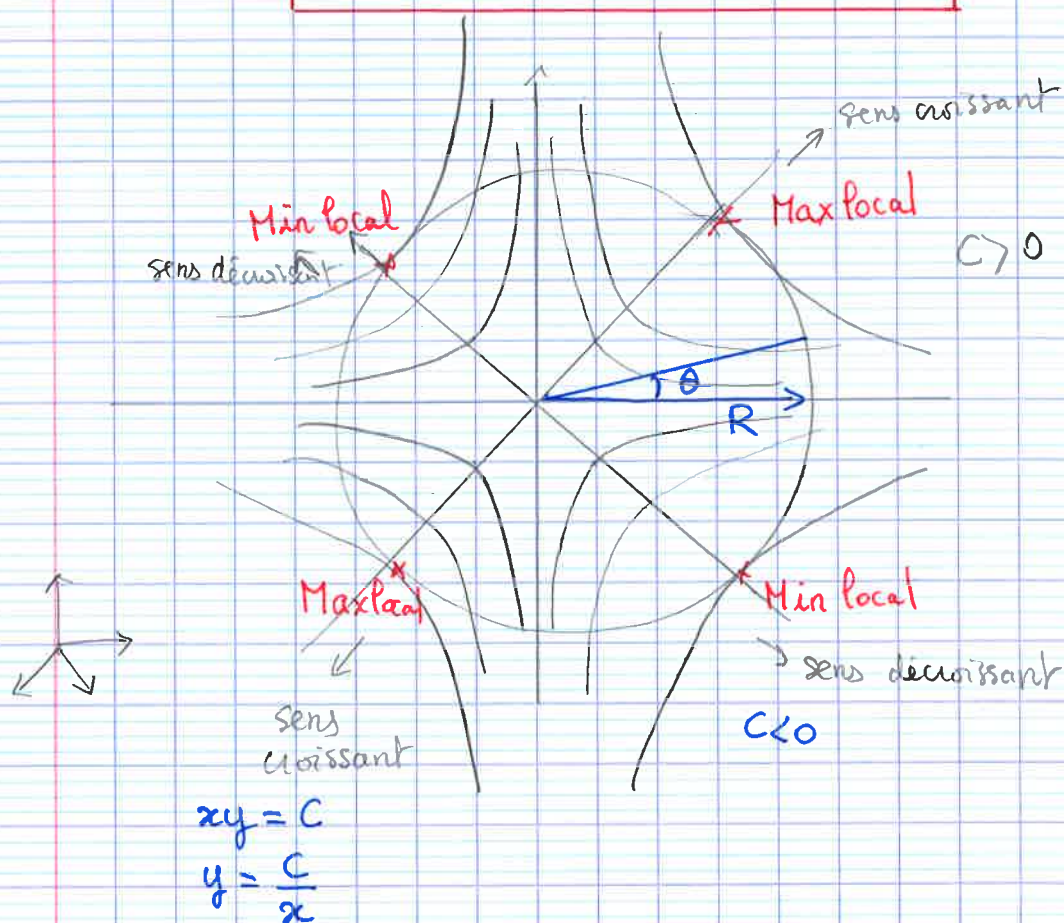


chapitre 6
p 67

Optimisation sous contraintes



p 69 Ex: * $x^2 + y^2 = 2$ impossible d'exprimer en une équation $y = f(x)$
 * $e^y = 2 + x^2$
 $y = \ln(2 + x^2)$ oui on peut substituer y à cette valeur
 et oublier la contrainte car $y = f(x)$ où f est définie partout.

Ex de pbm

$$\text{Max } x + xy^2$$

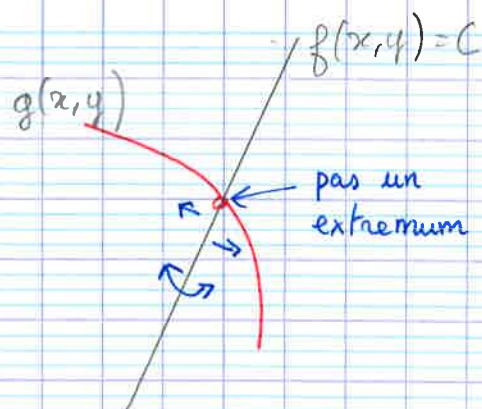
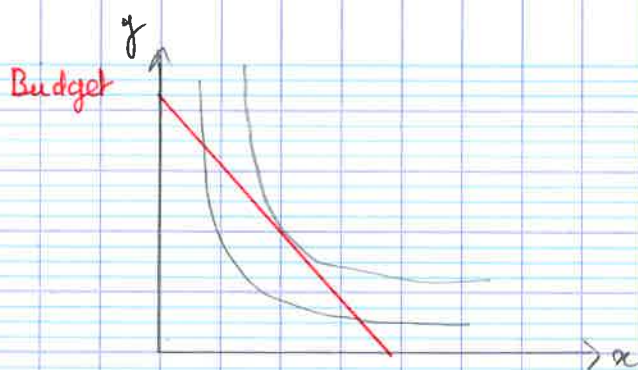
$$\text{Sous contrainte } x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow \text{Max: } x + x(1 - x^2) = 2x - x^3$$

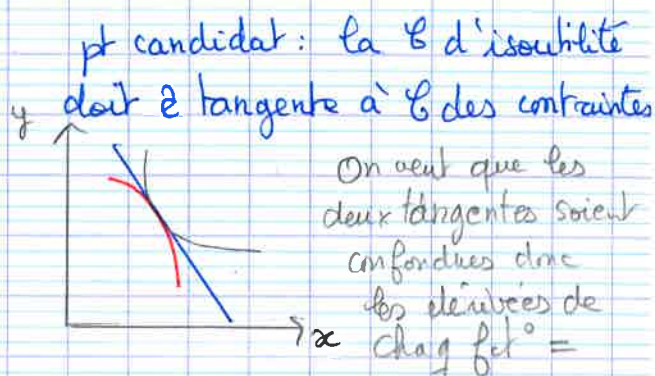
$$\text{sc } -1 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow \text{Max } 2x - x^3$$

$$\text{sc } x^2 + y^2 = 1$$



$$\underbrace{P_x x + P_y y - R = 0}_{g(x, y) \text{ contrainte}}$$



$$f(x, y) = C \\ \Leftrightarrow y = g(x)$$

Si $\frac{df}{dy} \neq 0$ Th des fonctions implicites

$$\text{avec } y'(x) = \frac{-\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

$$\bullet g(x, y) = 0$$

Si $\frac{dg}{dy} \neq 0$ on a la même chose

$$\Leftrightarrow y = y_1(x) \quad \text{avec} \quad y_1(x) = \frac{-\frac{dg}{dx}}{\frac{dg}{dy}} = \frac{-P_x}{P_y}$$

6.5.1 Qualificat° des contraintes

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$x \mapsto (g_1(x) \dots g_p(x))$$

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_p(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \uparrow p \rightarrow J_p$$

Exemple p 71 :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad (1) \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Calcul de la jacobienne des contraintes
⚠ on est dans $\mathbb{R}^3$ car (x, y, z)

$$Jg = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul du dét associé

$$\ast \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2y \quad \text{tous les pts pour lesquels } y \neq 0 \text{ sont qualifiés}$$

$$\ast \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x \quad \text{tous les pts pr lesquels } x \neq 0 \text{ sont qualifiés}$$

$$\Rightarrow \text{Problème : } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Mais en fait ces pts ne sont pas un pbm

car d'après (1) $x^2 + y^2 = 4$ et les points du "pbm" ne sont pas dans le domaine

→ donc tous les points du domaine sont qualifiés

Exemple p 72

$$\text{Max } x^2 + 4yz$$

$$\text{s.c. } x + y = 1$$

Qualification

$Jg = (1 \ 1 \ 0)$ de rang 1
Les contraintes sont "partout qualifiées" (partout sur le domaine)

ne pas oublier
car il y a z

13/1/30 → 16/1/11
30/11
07/12

p43

$$f(x, y, \lambda) = x^2 + 4yz - \lambda(x + y - 1)$$

$$\text{CN1: } \begin{cases} \frac{df}{dx} = 2x - \lambda = 0 \quad (1) \\ \frac{df}{dy} = 4z - \lambda = 0 \quad (2) \\ \frac{df}{dz} = 4y = 0 \quad (3) \\ x + y - 1 = 0 \quad (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \Leftrightarrow x = 1 \\ (2) \Leftrightarrow y = 0 \\ (3) \Leftrightarrow \lambda = 2 \\ (4) \Leftrightarrow z = 1/2 \end{cases}$$

point candidat pour $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
Ici pas un compact mais bon candidat pour 1 min

6.5.3

$$\frac{d}{dc} \left(f(x_1^*(c), \dots, x_n^*(c)) \right) = \frac{dx_1^*(c)}{dc} \frac{df}{dx_1}(x^*(c)) + \dots + \frac{dx_n^*(c)}{dc} \frac{df}{dx_n}(x^*(c))$$

6.5.4

$$D^2 \psi = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 4.$$

↓ valeur propre et pas le multiplicateur plus haut

X^* est un point critique $d(\Psi)(x) = d\mathcal{L}(X, \lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*)$

$$d\Psi(X^*) = 0$$

$$D^2\Psi(X) = D^2\mathcal{L}(X, \lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*)$$

donc si $D^2\mathcal{L}(X, \lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*)$ est semi définie positive

$\Rightarrow \Psi$ est convexe

donc en X^* on a un min global de Ψ

$$\forall X \quad \Psi(X) \geq \Psi(X^*)$$

$$\mathcal{L}(X, \lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*) \geq \mathcal{L}(X^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*)$$

$$f(X) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* g_i(X) \geq f(X^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* g_i(X^*) \geq f(X^*)$$

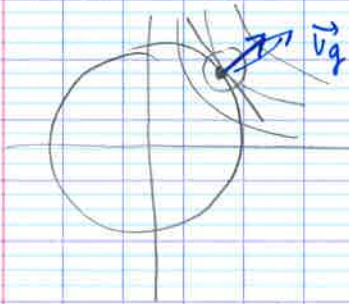
$\forall X$ admissible ($\forall i g_i(X) = 0$)

$$\text{or } f(X) \geq f(X^*)$$

En X^* on a un min global de f sous les contraintes

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

p73



direct^o admissibles: dir $\perp$ au gradient.

p74

Exemple:

$$\max x^2 + 4yz$$

$$\text{sc } x+y=1 \Leftrightarrow x+y-1=0$$

$$1 \text{ point candidat: } \lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$D^2\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 4$$

non définie mais pas forcément point selle

point selle de $\mathcal{L}$ si j'autorise toutes les directions
→ dépend des directions autorisées.

les contraintes impliquent qu'on n'a plus la m^o lecture:

Calcul des direct^o autorisées:

Jacobienne des contraintes:

$$Jg = (1 \ 1 \ 0) \quad \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$(1 \ 1 \ 0) (h_1 + h_2) = 0 \Leftrightarrow h_2 = -h_1$$

les directions admissibles sont

$$H \begin{pmatrix} h \\ -h \\ i \end{pmatrix}$$

pas un
complexe

pourquoi un
0 ?
et pas ds celui
du TD

$${}^t H \cdot D^2 \mathcal{L} \times H$$

$$\begin{pmatrix} h \\ -h \\ i \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2h \\ 4i \\ -4h \end{pmatrix}$$

$$(h \ -h \ i) [2h^2 - 4ih - 4ih]$$

→ forme quadratique n'est plus que de dim 2
2 paramètres

$${}^t H D^2 \mathcal{L} H = 2h^2 - 8ih$$

$$\begin{bmatrix} h & i \\ 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} h \\ i \end{matrix}$$

nature de cette forme quadratique :
Déf $= -16 < 0 \rightarrow$ non déf $\rightarrow$ point selle

$\lambda_1 \times \lambda_2 < 0 \rightarrow$ signes opposés

Les vp sont de signes opposés

${}^t H D^2 \mathcal{L} H$ non définie $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$ pt selle

Méthode de Gauss

$$\begin{aligned} {}^t H D^2 \mathcal{L} H &= 2(h^2 - 4ih) \\ &= 2(h - 2i)^2 - 8i^2 \rightarrow \text{non déf} \end{aligned}$$

$\uparrow$ $\oplus$ $\uparrow$ $\ominus$

on retrouve la m conclusion

Exemple p 75

$$\max_{sc} x^2 + 4yz$$

$$x+y=1$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice Hessienne bordée

$$H = \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^t B & A \end{bmatrix}$$

$n = 3$: dim M du début.

$p = 1$: contrainte

$n - p = 2 \rightarrow$ on doit calculer les deux derniers mineurs diagonaux principaux.

$$\det H = -4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16.$$

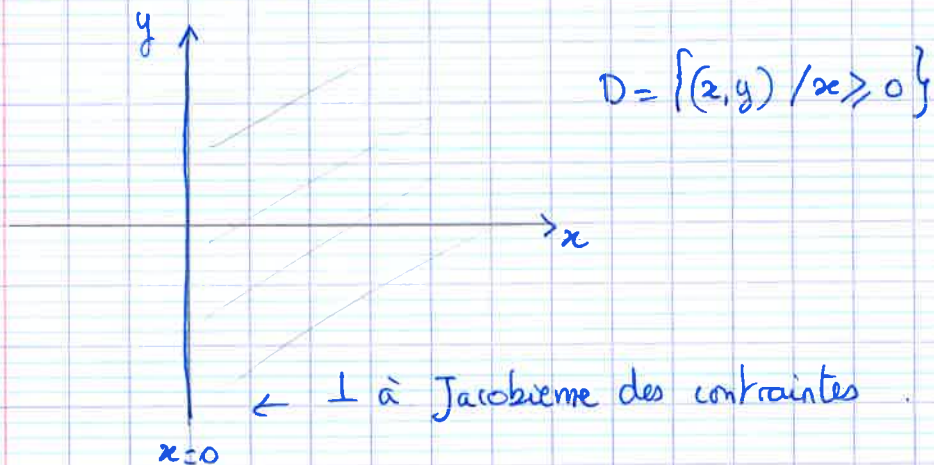
ni proposition 1 : ni du signe de $(-1)^m = (-1)^3 = -1 < 0$

ni proposition 2 : ni du signe de $(-1)^p = (-1)^1 = -1 < 0$

$\Rightarrow$ c'est un point selle.

f n'admet ni max, ni min, ni globaux, ni locaux

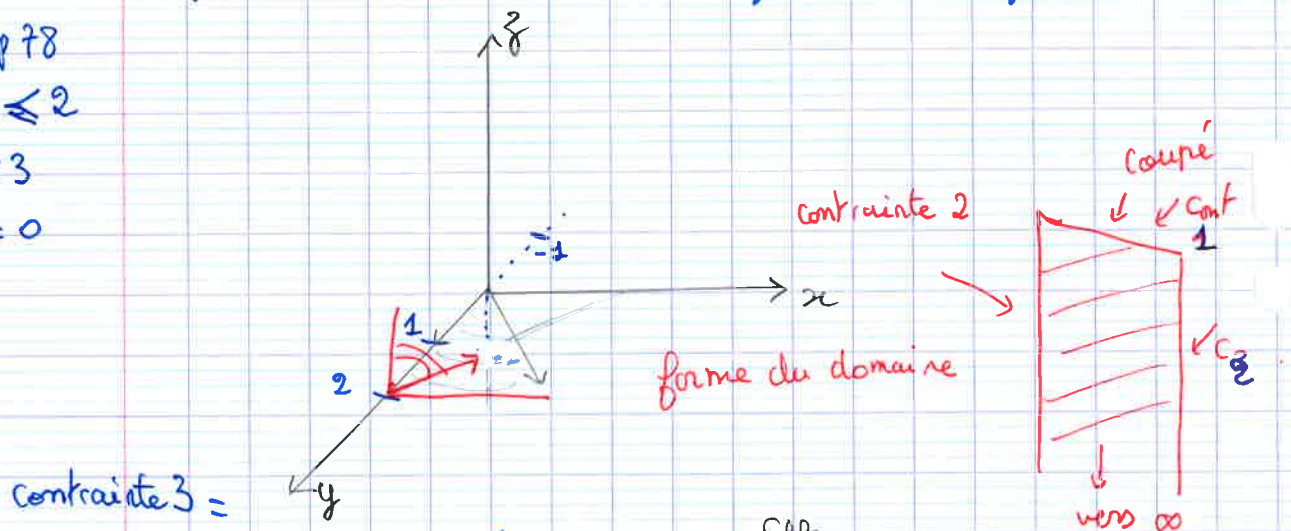
Notre ens. n'est pas un compact, sinon il y aurait un max et un min.



tan aux contraintes = $\perp$ au gradient des fct^o

Exemple p 78

$$\begin{array}{l} 1 \quad x+y \leq 2 \\ 2 \quad x^2 \leq 3 \\ 3 \quad x+z=0 \end{array}$$



contrainte 3 =

$$(x+z)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=-x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} = 0$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

contrainte 2:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$x + y = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{vecteur orthogonal à } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = 2 - x \\ z = z \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\geq f(x^*)$ on a un min global
les contraintes : $\begin{bmatrix} \lambda x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

1) On veut le demi plan derrière le plan rouge dans le plan blanc.

→ 4 types de points :

① points à l'intérieur du domaine :

(1)

$$\begin{cases} x + y < 2 \\ x^2 < 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$Jg = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ de rang 1 ok}$$

Jacobienne des contraintes saturées.

(1) et (3)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 < 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$Jg = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det = -1 \neq 0$ de rang 2 ok!

(2) et (3)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 = 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$Jg = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x \neq 0 \text{ car } x^2 = 3 \text{ de rang 2 ok}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x+y=2 \\ x^2=3 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$$J_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x \neq 0 \text{ car } x^2 = 3$$

de rang 3 ok.

p 78

Exemple

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+y+z \leq 0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ cylindre

↑ que le bord
(peut être coupé en trois).



$$J_g = (2x \quad 2y \quad 0)$$

de rang 1 sauf si $x=y=0$

or $(0,0,z)$ n'est pas admissible

$$\textcircled{2} \begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$J_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x \neq 0 \text{ sauf si } x=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -2y \neq 0 \text{ sauf si } y=0$$

Seuls les points $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont tels que $\text{Rang } J_g \leq 2$
 Or ces points ne vérifient pas $x^2 + y^2 = 4$
 Conclusion: les contraintes sont partout qualifiées.

p79

6.8

Pour $\min_{x \in D} f(x)$ Il suffit de $\max_{x \in D} [-f(x)]$

$$\text{Arg Min}_{x \in D} f = \text{Arg Max}_{x \in D} f$$

$$\min_{x \in D} f(x) = -\max_{x \in D} -f(x)$$

p80

Exemple:

$$\begin{aligned} \max \quad & x+y \\ \text{sc} \quad & y + \frac{x^3}{3} = 0 \end{aligned}$$

qualificat° des contraintes :

$$J_g = \begin{bmatrix} x^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \end{matrix} \text{ de rang } 1$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x + y - \lambda \left(y + \frac{x^3}{3} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{L}}{dx} = 1 - \lambda x^2 \\ \frac{d\mathcal{L}}{dy} = 1 - \lambda = 0 \\ y + \frac{x^3}{3} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ \lambda = 1 \\ y = -\frac{x^3}{3} \end{cases}$$

Les points critiques sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ pour $\lambda = 1$

CS2 $D^2\mathcal{L} = \begin{bmatrix} -2\lambda x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Si Valeur propre 0 crée une direction admissible :
on est obligé de faire la méthode des directions :

$\lambda = 1 \quad D^2\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Méthode direction})$

$Jg = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$
 $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$

Directions admissibles $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2h \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} h & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2h^2 \end{pmatrix}$

${}^t H D^2\mathcal{L} H = -2h^2$ définie négative

En $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$, la fonction admet un max local qui vaut $\frac{2}{3}$

• Seu le 2^e pt on peut faire la m^{ême} méthode mais on peut faire une autre méthode =

Pour $\lambda = 1$
 $D^2\mathcal{L} = \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Au voisinage de $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, la première vp est $-2x > 0$ et la seconde est 0

La matrice $D^2\mathcal{L}$ est au voisinage de $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ semi définie positive donc $\mathcal{L}$ est localement convexe

⇒ En $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ on a un Min local qui vaut $-\frac{2}{3}$

Autre méthode : Hessien Bordé

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \nearrow \text{nb de Dables} \\ n=2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nearrow \text{nb de contraintes} \\ p=1 \end{matrix}$$

$$\text{Det } H = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{du signe de } (-1)^n > 0$$

donc définie négative

donc En $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ on a un max local.

Remarque :

$$\text{Max}_{x,y} x+y = \text{Max}_x x - \frac{x^3}{3}$$

$$\text{sc } y + \frac{x^3}{3} = 0$$

↑ Cette fonctⁿ n'admet clairement ni min ni max.

$$\bullet \text{Min}_{xy} -xy = \text{Min}_{x,y} -xy$$

$$\text{sc } 1-x^2-y^2 \geq 0$$

$$\text{sc } x^2+y^2-1 \leq 0$$

$$= -\text{Max}_{x,y} xy \quad \text{sc } x^2+y^2-1 \leq 0$$

Qualification: si $x^2+y^2 < 1$ Jg de rang Max...

$$\text{si } x^2+y^2-1 \quad Jg = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

de rang 1 sauf si $x=y=0$, or $x^2+y^2=1$ donc tjs de rang 1
Les contraintes sont partout qualifiées.

$$\mathcal{L}(x,y,\mu) = -xy - \mu(x^2+y^2-1)$$

$$\text{CN1: } \begin{cases} \frac{d\mathcal{L}}{dx} = y - 2\mu x = 0 \quad (1) \\ \frac{d\mathcal{L}}{dy} = x - 2\mu y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\mu \geq 0$$

$$\begin{cases} \mu(x^2+y^2-1) = 0 \quad (3) \rightarrow \text{car maximise ou minimise} \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \quad (4) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \mu = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } \mu = 0 \text{ le système devient : } \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ -1 \leq 0 \end{cases}$$

1^{er} point candidat $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $\mu = 0$

$$2^{\text{e}} \text{ cas : } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4\mu x \\ y = 2\mu x \\ x = 2\mu y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 4\mu^2 y \\ x = 2\mu y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (1 - 4\mu^2)y = 0 \\ x = 2\mu y \end{cases}$$

1^{er} sous cas : $y = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x^2 + y^2 = 1$ impossible

$$2^{\text{e}} \text{ sous cas : } \mu = \frac{1}{2} \quad (3) \Rightarrow x = y \\ (1') \Rightarrow 2x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2 points candidats $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ pour $\mu = 1/2$

Conclusion : on a 3 pts candidats :

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $\mu = 0$

$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ pour $\mu = 1/2$

$$D^2_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} -2\mu & 1 \\ 1 & -2\mu \end{bmatrix}$$

$$\text{En } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } \mu = 0 \quad D^2_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ non dif.}$$

Toutes les directions sont admissibles donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point selle.

Pour les autres points, $\mu = 1/2$

$$\forall X, D^2_{\mathcal{L}}(\mu = 1/2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \det = 0 \\ \text{Trace} = -2 \end{matrix}$$

Donc $\forall X$ D^2f est semi définie négative

L est globalement concave.

Aux points associés à $\mu = 1/2$ ^{cad} ie $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

On a un Max global qui vaut $\frac{1}{2}$

$(-xy)$ admet.

en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un pt selle

→ pourquoi ? car compact ?

la contrainte est un

en $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ un Min global qui vaut $-\frac{1}{2}$

Sous la contrainte $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$

Les direct^s sont de descente ça marche bien