

Enseignant : Nicolas Dos Santos TD 2609 Contrôle du 22 Octobre 2017	Nom : Prénom : Signature :
---	----------------------------------

Lisez bien l'énoncé, on justifiera clairement chaque réponse.

Cette feuille doit être rendue signée et placée à l'intérieur de la copie.

Aucun appareil électronique ne doit être utilisé sous peine d'avoir une note de 0.

Exercice 1 : Application linéaire et diagonalisation (12 pts)

Soit $f(x, y, z) = (2x + 3y + 3z, 3x + 2y + 3z, -3x - 3y - 4z)$

1. Donner l'ensemble de départ et d'arrivée de f . Justifiez rapidement que f est linéaire.
2. Calculer le noyau de f .
3. Calculer le rang de f .
4. Est-ce que f est injective ? Surjective ? Bijective ?
5. Donner la matrice représentative M de f . (vous explicitez les bases utilisées pour l'espace de départ et d'arrivée).
6. Déterminez les valeurs propres et les espaces propres de M . Vérifier vos résultats avec les méthodes usuelles ($\det M = 2$).
7. La matrice M est-elle diagonalisable ? Justifiez.
8. Calculez les matrices P et D telles que $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale.

Exercice 2 : Calcul de dérivée (5 pts)

Soit $f(x, y) = \frac{xy}{x - 2y}$ une fonction de 2 variables.

1. Représentez graphiquement l'ensemble de définition de f .
2. Déterminez le gradient de f .
3. Déterminez la matrice hessienne de f .

Exercice 3 : Famille de vecteurs (3 pts)

Soit a un paramètre de \mathbb{R} . On définit 3 vecteurs de \mathbb{R}^3

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } V_3 = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de cette famille de vecteur en fonction de a ?
2. Est-ce que cette famille est une base ?