Enseignant : Nicolas Dos Santos
TD 2610
Contrôle du 23 octobre 2023

Lisez bien l'énoncé, on justifiera clairement chaque réponse.

Question de cours

$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Est-ce que la famille (V_1,V_2,V_3) est une famille base de R^3 ?

Exercice 1 : Application linéaire

Soit f(x,y,z)= (x+2y+3z,2x+ay-z,3x-y) et a un réel.

1. Donner les espaces de départ et d'arrivé de f et justifiez rapidement que f est linéaire.
2. Calculer le noyau de f et le rang de f en fonction de a.
3. Est-ce que f est injective ? Surjective ? Bijective ? (en fonction de a)
   Soit A la matrice représentative de f dans la base canonique des espaces de départ et d'arrivée.
4. Rappelez la base canonique et calculer A.
5. A est-elle inversible ? (en fonction de a)

Exercice 2 : Diagonalisation de matrice

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Trouver les valeurs propres de cette matrice. Indiquer comment vous passez d'une étape à une autre à chaque fois.
2. Vérifier les résultats avec les tests classiques.
3. Déterminer les différents espaces propres.
4. La matrice est-elle diagonalisable ? Justifiez.
5. Justifier l'existence et calculer les matrices P et D telles que $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale. On rangera les valeurs propres par ordre croissant et il est inutile de calculer l'inverse de P.

Exercice 3 : Calcul de dérivée

Soit $f(x, y) = 3xyexp(2x - 3y)$ une fonction de 2 variables.

1. Déterminez l'ensemble de définition de f.
2. Déterminez les dérivées première de f.
3. Déterminez les dérivées seconde de f.

Exercice 4 : Exercice ramassé à la séance du 9/10 (bonus de 3 points) question de cours TD 2010

soit $\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \end{cases}$

Est ce que (v_1, v_2, v_3) est une base R^3 ?

on pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

On developpe sur la premiere colonne

$$\det A = -1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \det A = -(7-5) - 1(21+6) + 2(15+6)$

$\Rightarrow \det A = -2 - 27 + 42$

$\Rightarrow \det A = 13$

donc (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de 3 vecteurs de R^3 ($\dim R^3 = 3$)

donc c'est une base.

Exercice 1 du TD LG 110

Soit $f(x,y,z) = (x+2y+3z\ ,\ 2x+\alpha y - z\ ,\ 3x-y)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

1) f est une fonction de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. f est linéaire car toutes ses composantes sont linéaires

2) $\ker f$?

Soit $X \in \ker f$

$\Rightarrow f(x,y,z) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+\alpha y - z = 0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 7x+(2+3\alpha)y = 0 \quad 3L_2+L_1 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+6x+3z=0 \\ 7x+3(2+3\alpha)x=0 \\ y=3x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+3z=0 \\ (13+9\alpha)x=0 \\ y=3x \end{cases}$

Si $13+9\alpha=0$

$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{13}{9}$

$\begin{cases} 7x+3z=0 \\ y=3x \end{cases}$

donc $(x,y,z) = \{x(1,3,-\frac{7}{3}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Si $13+9\alpha \neq 0$

$\begin{cases} 7x+3z=0 \\ x=0 \\ y=3x \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=y=z=0$

On a donc $\ker f = \begin{cases} \{\vec{0}\} \text{ si } \alpha \neq -\frac{13}{9} \\ \{x(1,3,-\frac{7}{3}) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$

En utilisant le theoreme du rang

$\dim \mathbb{R}^3 = \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f$

donc

$$\operatorname{rg} f = \begin{cases} 3 & \text{si } \alpha \neq -13/4 \\ 2 & \text{si } \alpha = -\frac{13}{4} \end{cases}$$

---

3) Si $\alpha \neq -\frac{13}{4}$

f est injective car $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$, est surjective car $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

et est bijective car injective et surjective

Si $\alpha = \frac{13}{4}$

f n'est pas injective car $\operatorname{Ker} f \neq \{\vec{0}\}$, n'est pas surjective car $\operatorname{rg} f \neq \dim$

et n'est pas bijective car pas injective

4) La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$f((1,0,0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$f((0,1,0)) = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$

$f((0,0,1)) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5) A est diagonalisable car symetrique

6) A est inversible pour $\alpha \neq -\frac{13}{4}$ car f est bijective

A n'est pas inversible pour $\alpha = -\frac{13}{4}$ car f n'est pas bijective

Controle 1 du TD 2010

Exercice 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1, Calculons les valeurs propres de M

Soit P, le polynome caractéristique de M

$P(X) = \det(M - XI)$

$\Rightarrow P(X) = \begin{vmatrix} 3-X & -4 & 4 \\ 2 & -3-X & 2 \\ 1 & -1 & -X \end{vmatrix}$

$\Rightarrow P(X) = \begin{vmatrix} 3-X & -4 & 0 \\ 2 & -3-X & -1-X \\ 1 & -1 & -1-X \end{vmatrix}$

$C_3 + C_2$

$\Leftrightarrow P(X) = (-1-X) \begin{vmatrix} 3-X & -4 & 0 \\ 2 & -3-X & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow P(X) = (-1-X) \begin{vmatrix} 3-X & -4 & 0 \\ 1 & -2-X & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $L_2 - L_3$

$\Leftrightarrow P(X) = (-1-X) \begin{vmatrix} 3-X & -4 \\ 1 & -2-X \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow P(X) = (-1-X)\left[(3-X)(-2-X)+4\right]$

$\Leftrightarrow P(X) = (-1-X)\left[-6-3X+2X+X^2+4\right]$

$\Rightarrow P(X) = (-1-X)(X^2-X-2)$. On voit que -1 est racine de P

$\Rightarrow P(X) = (-1-X)(-1-X)(2-X)$

$\Rightarrow P(X) = (2-X)(1+X)^2$

Les valeurs propres de M sont : -1 de multiplicité 2

2 de multiplicité 1

2, Vérifions les valeurs propres de M

$trace(M) = 0$, c'est bien la somme des valeurs propres

$\det(M) = -8-8+12+6 = 2$, c'est bien le produit des valeurs propres

3, Soit $X \in E_{-1}$

$MX = -X$

$\Rightarrow (M+I)X = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x - y + z = 0$

$\Rightarrow y = x + z$

On a donc $E_{-1} = \{(x, x+z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}^2\}$

Soit $X \in E_2$

$MX = 2X$

$\Rightarrow (M - 2I)X = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 4z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4y - 4z \\ 8y - 8z - 5y + 2z = 0 \\ 4y - 4z - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4y - 4z \\ 3y - 6z = 0 \\ 3y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y - 4z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8z - 4z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z \end{cases}$$

On a donc $E_2 = \{z(4, 2, 1) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

$+\begin{cases} \dim E_{-1} = 2 \\ \dim E_2 = 1 \end{cases}$

M est donc diagonalisable car la dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres associées.

5, Comme M est diagonalisable, il existe D, P tels que $M = PDP^{-1}$

On a

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 du TD 26 10

$f(x,y) = 3xy\, e^{2x-3y}$

1) f est définie sur $\mathbb{R}^2$

2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y\, e^{2x-3y} + 2 \times 3xy\, e^{2x-3y}$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (3y + 6xy)\, e^{2x-3y}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x\, e^{2x-3y} - 9xy\, e^{2x-3y}$

$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (3x - 9xy)\, e^{2x-3y}$

---

3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6y\, e^{2x-3y} + 2(3y + 6xy)\, e^{2x-3y}$

$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12(y + xy)\, e^{2x-3y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -9x\, e^{2x-3y} - 3(3x - 9xy)\, e^{2x-3y}$

$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (-18x + 27xy)\, e^{2x-3y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left((3x - 9xy)\, e^{2x-3y}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (3 - 9y)\, e^{2x-3y} + 2(3x - 9xy)\, e^{2x-3y}$

$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (3 - 9y + 6x - 18xy)\, e^{2x-3y}$

---

f est C^2 comme composée de fonction C^2 d'après le théorème de Schwartz

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (3 - 9y + 6x - 18xy)\, e^{2x-3y}$
