

Révisions :

exercice sur les suites ex 2 p 91

$$u_{n+2} = \frac{4u_n + 3}{2u_n} \quad u_0 = 5 \quad u_n = u_{2n} \quad w_n = u_{2n+1}$$

$$a) f(x) = \frac{4x+3}{2x} = 2 + \frac{3}{2x}$$

$$b) n=0 \quad w_0 = u_1 = f(u_0) = 2 + \frac{3}{10} = 2,3$$

$$v_0 = u_0 = 5$$

Effectivement $w_0 < v_0$

$n \mapsto n+1$ On suppose $w_n < v_n$

$$\text{or } w_{n+1} = f \circ f(u_n) \text{ et } v_{n+1} = f \circ f(v_n)$$

Montrons que $f \circ f$ est croissante

$$f'(x) = -\frac{3}{2x^2} \leq 0 \text{ donc } f \text{ est décroissante}$$

$$\text{Comme } (f \circ f)' = \underbrace{f'}_{\leq 0} \times \underbrace{f' \circ f}_{\leq 0} > 0$$

$f \circ f$ strictement croissante

$$w_n < v_n$$

$$\Rightarrow f \circ f(w_n) < f \circ f(v_n)$$

$$w_{n+1} < v_{n+1}$$

QED.

c) w_{n+1} est une suite récurrente avec $f \circ f$ croissante donc v_n monotone et de même pour w_n

$$v_1 = u_2 = 2 + \frac{3}{2 \times \frac{23}{10}} = 2 + \frac{15}{23} = 2,65 < \underbrace{v_0}_{=5}$$

donc (v_n) est décroissante.

$$w_1 = u_3 = 2 + \frac{3}{2 \times 2,65} = 2,56$$

$w_1 > w_0$ et w_n croissante

$$w_0 < w_n < v_n < v_0$$

w_n croissante majorée par v_0
 v_n décroissante minorée par w_0 } $\Rightarrow$ les suites convergent

On cherche les points fixes de f :

$$f(x) = 2 + \frac{3}{2x}$$

$$f \circ f(x) = 2 + \frac{3}{2(2 + \frac{3}{2x})} = 2 + \frac{3x}{3 + 4x} = x$$

$$\Leftrightarrow 6 + 8x + 3x = 3x + 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = 16 + 24 = 40$$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$$

~~pas de notre intervalle.~~

(u_{2n}) et (u_{2n+1})

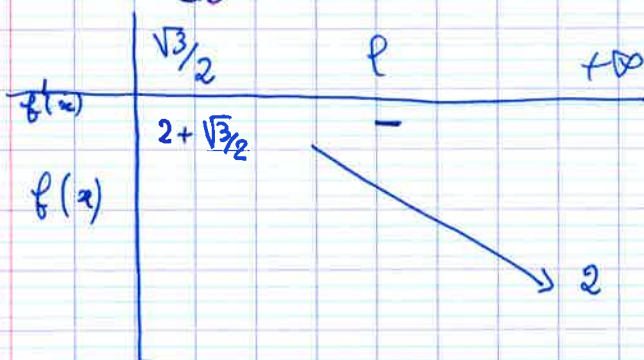
donc les 2 suites convergent vers la même lim car il n'y a qu'un pt fixe

$l = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$ les suites sont adjacentes

Donc (u_n) converge aussi vers $l = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$f'(x) = \frac{-3}{2x^2}$$

$$f(x) = 2 + \frac{3}{2x}$$



Remarque si $u_0 \in \left[\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right[$

$$u_1 \in [2; +\infty[$$

Comme $2 + \sqrt{\frac{3}{2}} > 2$ $I = [2; +\infty[$

$$\begin{aligned} f(I) &\subset \left[2; 2 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right] \\ &\subset [2; +\infty[\end{aligned}$$

Comme $x \geq 2$ $x^2 \geq 4$

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4} \quad \frac{3}{2x^2} \leq \frac{3}{8}$$

$$\text{Sur } I \quad |f'(x)| \leq \frac{3}{8} < 1$$

Le th de convergence s'applique et (u_n) converge vers 1 pt fixe de I

Comme il n'y a qu'un pt fixe de I
donc si $u_0 \in \left[\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right[$

(u_n) converge vers $1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

e) $|f'(l)| < 1$ donc l est un équilibre stable

sous contrainte

- Si M SD⁺ ou -
regarder autour du pt prop de convexité locale
autour de $x \rightarrow$ si $\geq 0 \rightarrow$ min local
 $\rightarrow$ trouver les pp.
 $\rightarrow$ Sinon méthode des direct°
Si cette dir n'est pas admissible.
 $\rightarrow$ pbm réglé.
- Si non def, ts les cas sont possibles