Enseignant : Matthieu Guillo TD G01 Contrôle du 06 Novembre 2019	Nom : Prénom : Signature :

Il est demandé de rédiger proprement.
Lisez bien l'énoncé, on justifiera clairement chaque réponse.
Cette feuille doit être rendue signée et placée à l'intérieur de la copie.
Aucun appareil électronique ne doit être utilisé sous peine d'avoir une note de 0.

Question de cours :

Donnez la définition d'une application linéaire.

Exercice 1 : Diagonalisation de matrice

Soit $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$

1. Trouvez les valeurs propres de cette matrice et indiquez leurs multiplicités.
2. Peut-on dire que la matrice est-elle diagonalisable? Justifiez.
3. Vérifiez vos résultats avec les tests classiques.
4. Trouvez tous les espaces propres et, pour chacun d'eux, donnez une base et sa dimension. On choisira des vecteurs propres tels que la première composante non nulle soit entière et positive.
5. Trouvez les matrices D et P telles que $A=PDP^{-1}$. On classera les valeurs propres dans l'ordre croissant.
6. Calculez P^{-1}.

Exercice 2 : Calcul de dérivées partielles

On rappelle que si f est une fonction de 3 variables x, y et z, alors $\overrightarrow{Grad}(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y};\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Soit $f(x,y,z)=ye^{(-z^2+x)y}$, calculez $\overrightarrow{Grad}(f)$

TOURNEZ LA PAGE SVP

Exercice 3 : Application linéaire

Soit $f_\alpha(x,y,z,t)=(2x-2y+z-t;6x-5y+4z-4t;4x-2y+(\alpha+2)z+(\alpha-6)t)$
où α est un paramètre réel

1. Quels sont les espaces de départ et d'arrivée ?
2. Justifiez que cette application f_α est linéaire.
3. Déterminez le noyau de f_α, donnez aussi une base ainsi que sa dimension.
4. Quel est le rang de f_α ?
5. Trouvez une base de $\mathrm{Im}(f_\alpha)$ en justifiant bien la base.
6. f_α est-elle injective, surjective, bijective ?
7. Écrivez la matrice représentative de f_α, notée $M(f_\alpha)$
8. Pour quelle(s) valeur(s) de α cette matrice est-elle inversible ? Justifiez.