Thème 7 : Équations de récurrence linéaire   Ansan CALLOO ①

Ex 3

(a) $3U_{n+2} - 3U_{n+1} + U_n = 0$, $U_0 = 1$ $U_1 = 0$.

Dans chacun des problèmes de cette exercice, on procédera ~~d'abord~~ par étape :

Étape 0 : Préparation du problème en mettant tous les termes en U_n, U_{n+1} ou U_{n+2} sur la gauche et les termes restants à droite.

Remarque : Écrivez les équations de sorte que le terme U_n soit celui de rang le moins élevé en effectuant des changements d'indices. Ici, ce ne sera pas nécessaire ; mais c'est plus pratique pour trouver les solutions particulières.

Étape 1 : Recherche de la solution de l'équation homogène. L'équation homogène c'est $aU_{n+2} + bU_{n+1} + cU_n = 0$.

Étape 2 : Recherche de la solution particulière de l'équation avec second membre.

Étape 3 : Écriture de la solution générale avec 2nd membre.

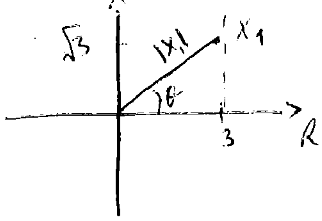
Étape 4 : Solution complète après prise en compte des conditions initiales.

Equation caractéristique $3X^2 - 3X + 1 = 0$.

Étape 1 $\quad \Delta = (-3)^2 - 4(3)(1) = (\sqrt{-3})^2 = (3i)^2$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{3+\sqrt{3}\,i}{6} \qquad X_2 = \frac{3-\sqrt{3}\,i}{6} = \overline{X_1}$$

$$|X| = |X_1| = \sqrt{\frac{1}{36}(9+3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\cos\theta = \frac{Re(X_1)}{|X|} = \frac{3}{6}\Big/\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$\sin\theta = \frac{Im(X_1)}{|X|} = \frac{\sqrt{3}}{6}\Big/\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}$$

Solution homogène $U_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \left[\alpha\cos\frac{n\pi}{6} + \beta\sin\frac{n\pi}{6}\right]$

Etape 2 : Pas de solution particulière à chercher car c'est l'Equation homogène qui nous est donnée (second membre nul).

Etape 4 : Solutions complète avec CI (conditions initiales).

$n=0$, $U_0 = 1$.

$$U_0 = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^0}_{=1} \left(\alpha \underbrace{\cos \frac{0 \times \pi}{6}}_{=1} + \beta \underbrace{\sin \frac{0 \times \pi}{6}}_{=0} \right) = 1$$

$\Rightarrow \quad \alpha = 1$.

$n=1$, $U_1 = 0$.

$$U_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left(\alpha \underbrace{\cos \frac{1 \times \pi}{6}}_{\sqrt{3}/2} + \beta \underbrace{\sin \frac{1 \times \pi}{6}}_{1/2} \right) = 0$$

$$\alpha \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\beta}{2} = 0 \Rightarrow \beta = -\sqrt{3}.$$

$$\boxed{U_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \left[\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right]}$$

(b) Etape 1 : OK car la solution est en (a)

$$U_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \left[\alpha \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right].$$

Etape 2 : $3U_{n+2} - 3U_{n+1} + U_n = 1$. (Equation avec 2nd membre).

Second membre est un polynôme de degré 0... autrement dit une constante.

$\Rightarrow$ Recherche de la solution particulière sous la forme $Q(n) = k$. $\Rightarrow$ $U_n = k$

$U_{n+1} = k$

$U_{n+2} = k$.

$3k - 3k + k = 1 \Rightarrow k = 1$.

Étape 3 : Solution générale :

$$U_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \left[\alpha \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right] + 1.$$

Étape 4 : Solution complète avec CI.

$n=0$, $U_0 = 1$.

$U_0 = \alpha + 1 = 1 \Rightarrow \alpha = 0$

$n=0$, $U_1 = 0$

$$U_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cancel{\alpha \cos \frac{\pi}{6}}^{\text{car } \alpha = 0} + \beta \underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{=1/2}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\beta}{2} = -1 \Rightarrow \beta = \frac{-2\times 3}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}.$$

$$\boxed{U_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \left[-2\sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right] + 1}$$

(c). $9U_{n+2} + 6U_{n+1} + U_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. $U_1 = 3$ $U_2 = 1$.

Étape 1 :

Équation caractéristique $9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$

$$\Delta = 6^2 - 4\times 9 = 0.$$

$\Rightarrow$ Une racine double $x = -\frac{1}{3}$.

Solution homogène $U_n = (\alpha + \beta n)\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Étape 2 :

Dans le cas ici, le second membre est une forme exponentielle.

La solution particulière $Q(n)$ est de la forme suivante :

$$Q(n) = kn^{\nu}x^n = kn^{\nu}\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad \nu = \text{multiplicité de la racine} = 2$$

$$= kn^2\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

$U_{n+2} = k(n+2)^2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2}$ $U_{n+1} = k(n+1)^2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ $U_n = kn^2\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$$\Rightarrow 9k(n+2)^2\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2}}_{\left(-\frac{1}{3}\right)^2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n} + 6k(n+1)^2\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}_{\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n} + kn^2\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

On divise chaque terme par $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$$9k(n+2)^2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6k(n+1)\left(-\frac{1}{3}\right) + kn^2 = 1.$$

$$k(\cancel{n^2}+4n+4) - 2k(\cancel{n^2}+2n+1) + \cancel{kn^2} = 1.$$

$$4k - 2k = 1 \Rightarrow k = 1/2.$$

$$Q(n) = \frac{1}{2}n^2\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Etape 3 :

$$U_n = (\alpha+\beta n)\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n^2\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Etape 4 : CI.

$n=1$ $\quad U_1 = 3.$

$$U_1 = (\alpha+\beta)\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\times -\frac{1}{3} = 3.$$

$$-(\alpha+\beta) = 9 + \frac{1}{2}. \quad \text{—— } (1)$$

$n=2$ $\quad U_2 = 1.$

$$U_2 = (\alpha+2\beta)\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\times 2^2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1.$$

$$\alpha + 2\beta = 7 \quad \text{—— } (2)$$

En résolvant (1) et (2), $\alpha = -26$ $\quad \beta = 33/2.$

$$\boxed{U_n = \left(-26 + \frac{33}{2}n\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n^2\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

(d) $\quad 9U_{n+2} - 3n = 9U_{n+1} - 3U_n + 6 \qquad U_0 = 1,\ U_1 = 0.$

Etape 0 : Réarrangement de l'équation.

$$9U_{n+2} - 9U_{n+1} + 3U_n = 3n + 6.$$

En divisant chaque terme par 3, $3U_{n+2} - 3U_{n+1} + U_n = n + 2.$

L'équation homogène a déjà été résolue en (a) et (b).

Etape 1 : $U_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n\left[\alpha\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \beta\sin\frac{n\pi}{6}\right].$

Etape 2 : La solution particulière $Q(n)$ s'écrit sous la forme d'un polynôme d'ordre 1.

$$Q(n) = kn + c.$$

$U_{n+2} = k(n+2) + c \qquad U_{n+1} = k(n+1) + c \qquad U_n = kn + c$

$$3\big(k(n+2)+c\big) - 3\big(k(n+1)+c\big) + kn + c = n + 2$$

$$kn + 3k + c = n + 2$$

Par identification des termes à droite et à gauche,

$$\left.\begin{array}{ll} k = 1 & - (1) \\ 3k + c = 2 & - (2) \end{array}\right\} \Leftrightarrow k = 1, \ c = -1.$$

$$Q(n) = n - 1.$$

Etape 3 :

$$\boxed{U_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \left[\alpha \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right] + n - 1.}$$

Etape 4 : Solution complète avec CI.

$n = 0, \ U_0 = 1.$

$$U_0 = \alpha - 1 = 1 \Rightarrow \alpha = 2.$$

$n = 1, \ U_1 = 0$

$$U_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \beta \cdot \frac{1}{2}\right] + 1 - 1 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{\beta}{2} = 0 \Rightarrow \beta = -2\sqrt{3}.$$

$$\boxed{U_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \left(2\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right) + n - 1.}$$

2) $U_{n+2} - 3U_{n+1} + 2U_n = n.$

Etape 1 : Solution de l'équation homogène.

$U_{n+2} - 3U_{n+1} + 2U_n = 0.$

Équation caractéristique : $X^2 - 3X + 2 = 0$

$(X-2)(X-1) = 0$

Racines de l'équation caractéristiques : $X_1 = 1, \ X_2 = 2.$

Solution de l'équation homogène :

$$U_n = \alpha(1)^n + \beta 2^n = \alpha + \beta 2^n.$$

Etape 2 : Solution de l'équation particulière

Le second membre est un polynôme d'ordre 1. De plus, 1 est racine de l'équation caractéristique de multiplicité 1.

$$Q(n) = n^1 . (kn + c) = kn^2 + cn$$

$$U_{n+2} = k(n+2)^2 + c(n+2) \quad U_{n+1} = k(n+1)^2 + c(n+1) \quad U_n = kn^2 + cn.$$

$$U_{n+2} - 3U_{n+1} + 2U_n = k(n+2)^2 + c(n+2) - 3(k(n+1)^2 + c(n+1)) + 2(kn^2 + cn) = n.$$

$$k(n^2 + 4n + 4) + c(n+2) - 3(kn^2 + 2kn + k + c(n+1)) + 2kn^2 + 2cn = n.$$

$$-2kn + k - c = n.$$

Par identification : $\left.\begin{array}{l} -2k = 1 \\ k - c = 0 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} k = -1/2 \\ c = -1/2 \end{array}$

$$Q(n) = -\frac{1}{2} n(n+1).$$

Etape 3 : Solution générale

$$\boxed{U_n = \alpha + \beta . 2^n - \frac{1}{2} n(n+1)}$$

α et β sont déterminés à partir des 1er termes.

d) $2U_{n+2} - 3U_{n+1} + U_n = 1 + 2^n.$

Etape 1 : Équation homogène.

$2U_{n+2} - 3U_{n+1} + U_n = 0. \Rightarrow$ Équation caractéristique :

$$2\lambda^2 - 3\lambda + \lambda = 0 \Rightarrow (2\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0.$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

$$U_n = \alpha . 1^n + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n = \alpha + \frac{\beta}{2^n}.$$

Etape 2 : Recherche de la solution particulière.

Ici, le membre de gauche est une combinaison d'un polynôme de degré 0 (terme constant) et d'un terme exponentiel.

Nous devons donc traiter ce cas en résolvant l'équation pour 2 solutions particulières distinctes.

$1^{ère}$ solution particulière polynômiale

$$Q_1(n) = n^\nu \cdot k \quad \nu = 1 \text{ car 1 est racine simple}$$
$$= kn$$

$U_{n+2} = k(n+2) \quad U_{n+1} = k(n+1) \quad U_n = kn$

$2U_{n+2} - 3U_{n+1} + U_n = 1$

$2k(n+2) - 3k(n+1) + kn = 1 \Rightarrow k = 1$

$$Q_1(n) = n$$

$2^{ème}$ solution particulière : exponentielle.

$Q_2(n) = c \cdot 2^n$ car 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique.

$U_{n+2} = c\,2^{n+2} = 2^2 c \cdot 2^n \quad U_{n+1} = c\,2^{n+1} = 2c \cdot 2^n \quad U_n = c\,2^n$

$2U_{n+2} - 3U_{n+1} + U_n = 2^n$

$2 \times 4c\cancel{2^n} - 3 \times 2c\cancel{2^n} + c\cancel{2^n} = \cancel{2^n}$

$8c - 6c + c = 1 \Rightarrow c = 1/3$

$$Q_2(n) = 2^n/3$$

$$Q(n) = Q_1(n) + Q_2(n) = n + 2^n/3$$

Etape 3 : Solution générale

$$\boxed{U_n = \alpha + \frac{\beta}{2^n} + n + 2^n/3}$$ (α et β à déterminer en fonction des 1^{ers} termes).

Ex 2

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ Y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Nous allons diagonalise la matrice avec recherche de valeurs propres et des vecteurs propres.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12$$
$$= (\lambda - 3)(\lambda - 4)$$

$\lambda = 4$, $E_{\lambda=4}$?

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow y = -x . \qquad E_{\lambda=4} = \vec{\text{vect}}\left((1,-1)\right) \quad \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 3$, $E_\lambda = 3$?

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow y = -\tfrac{1}{2}x \qquad E_{\lambda=3} = \vec{\text{vect}}\left((2,-1)\right) \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Décomposition de A : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. $P = (\vec{V}_1 \ \vec{V}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $U_n = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ et $U_{n-1} = \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ Y_{n-1} \end{pmatrix}$.

$$U_n = AU_{n-1}.$$

En supposant la récurrence vraie à l'ordre n, elle est aussi vraie à l'ordre $n-1$ $\Rightarrow U_{n-1} = AU_{n-2}$, $U_{n-2} = AU_{n-3}$.

$$\Rightarrow U_n = AU_{n-1} = A \cdot AU_{n-2} = A^2 U_{n-2} = A^2 A \cdot U_{n-3}.$$
$$= \dots = A^n U_0 .$$

$A^n = PD^nP^{-1} \Rightarrow U_n = PD^nP^{-1}U_0$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}U_0 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_0 - 2Y_0 \\ X_0 + Y_0 \end{pmatrix}$$

$$D^nP^{-1}U_0 = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -X_0 - 2Y_0 \\ X_0 + Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n(-X_0 + 2Y_0) \\ 3^n(X_0 + Y_0) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{U_n = PD^nP^{-1}U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n(-X_0 - 2Y_0) \\ 3^n(X_0 + Y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4^n(X_0 + 2Y_0) + 3^n(2X_0 + 2Y_0) \\ 4^n(X_0 + 2Y_0) - 3^n(X_0 + Y_0) \end{pmatrix}}$$

Ex 5

$$\begin{cases} X_n = \tfrac{1}{2}X_{n-1} + \tfrac{1}{4}Y_{n-1} + 2 \\ Y_n = 2X_{n-1} + 2Y_{n-1} - 4 \end{cases}$$

(a) À l'équilibre, $X_n = X_{n-1} = X_{eq}$
$Y_n = Y_{n-1} = Y_{eq}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{eq} = \tfrac{1}{2}X_{eq} + \tfrac{1}{4}Y_{eq} + 2 & -\ (1) \\ Y_{eq} = 2X_{eq} + 2Y_{eq} - 4 . & -\ (2) \end{cases}$$

$$\text{①} \times 4 \Rightarrow 4X_{eq} = 2X_{eq} + Y_{eq} + 2 \quad \text{②} * \rightarrow Y_{eq} = 2X_{eq} + 2Y_{eq} - 4 \Big\} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2X_{eq} - Y_{eq} = 8 \\ -2X_{eq} - Y_{eq} = -4 \end{matrix}$$

$$X_{eq} = 3 \quad Y_{eq} = -2.$$

L'équilibre du système $(X_{eq}, Y_{eq}) = (3, -2)$.

(b) Pour le diagramme de phase, il faut étudier :
$X_n - X_{n-1}$ et $Y_n - Y_{n-1}$.

$$X_n - X_{n-1} = \frac{1}{2}X_{n-1} + \frac{1}{4}Y_{n-1} + 2 - X_{n-1} = -\frac{1}{2}X_{n-1} + \frac{1}{4}Y_{n-1} - 2.$$

A l'équilibre $X_n - X_{n-1} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}X_{n-1} + \frac{1}{4}Y_{n-2} + 2 = 0$

$$Y_{n-1} = 2X_{n-1} - 8$$

1ère droite : $y_1 = 2x - 8$.

De plus, $X_n > X_{n-1}$ ssi $Y_{n-1} > 2X_{n-1} - 8 \Rightarrow y_1 > 2x - 8$

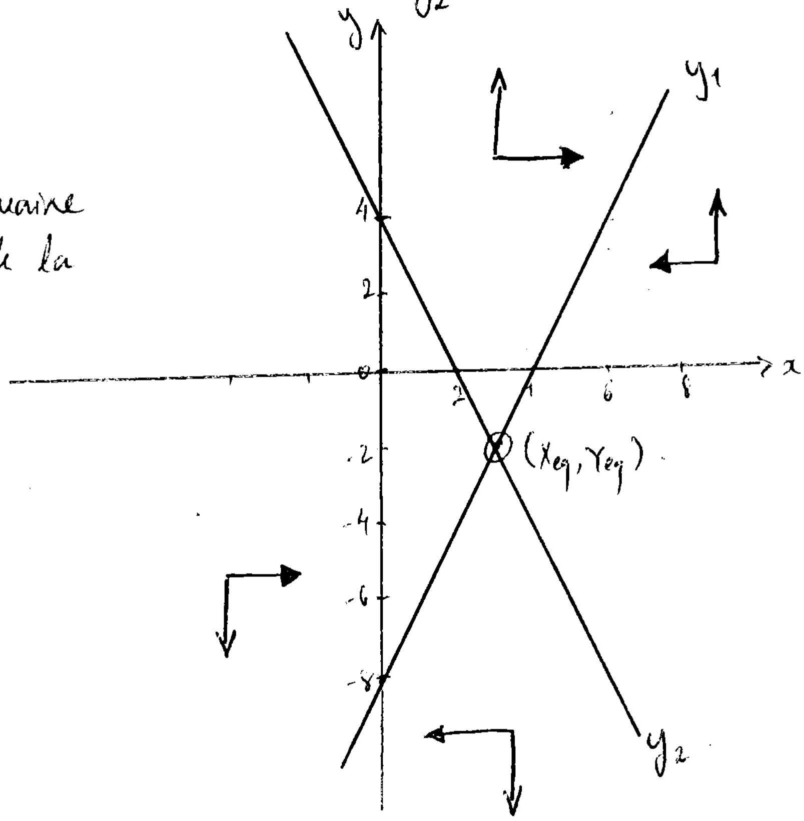
De même, $Y_n - Y_{n-1} = 2X_{n-1} + Y_{n-1} - 4 \Rightarrow Y_n - Y_{n-1} = 0$ ssi

$$Y_{n-1} + 2X_{n-1} - 4 = 0.$$

La 2ème droite : $Y_{n-1} = 4 - 2X_{n-1} \Leftrightarrow y_2 = 4 - 2x$

De plus, $Y_n > Y_{n-1}$ ssi $y_2 > 4 - 2x$.

$y_1 > 2x - 8$
$\Rightarrow$ C'est le domaine "au-dessus" de la droite y_1



Ex 1

a) Etape 0 : $X_n = 4X_{n-1} - 13X_{n-2} + 10$

$\Leftrightarrow X_{n+2} - 4X_{n+1} + 13X_n = 10$

Etape 1 : Équation homogène.

Équation caractéristique $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$.

$\Delta = 16 - 4(13) = -36 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6i$

$\lambda_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i \qquad \lambda_2 = 2-3i$.

$X_n = \alpha(2+3i)^n + \beta(2-3i)^n$.

Etape 2 : Recherche de la solution particulière.

$Q(n) = k \qquad X_{n+2} = k \qquad X_{n+1} = k \qquad X_n = k$.

$k - 4k + 13k = 10 \Rightarrow k = 1$

$Q(n) = 1$.

Etape 3 : Solution générale.

$X_n = \alpha(2+3i)^n + \beta(2-3i)^n + 1$

Etape 4 : Solution complète avec C.I.

$X_0 = 5 \Rightarrow \alpha + \beta + 1 = 5 \Rightarrow \alpha + \beta = 4$.

$X_1 = 9 \Rightarrow \alpha(2+3i) + \beta(2-3i) + 1 = 9$.

$2(\alpha+\beta) + 3(\alpha-\beta)i = 8$

Deux nombres complexes sont égaux si leurs parties réelles et imaginaires sont égales.

Par identification : $\left.\begin{array}{l} 2(\alpha+\beta) = 8 \\ 3(\alpha-\beta) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha+\beta = 4 \\ \alpha = \beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = 2. \end{array}$

$$\boxed{X_n = 2(2+3i)^n + 2(2-3i)^n + 1.}$$

(b) $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} > 1$. L'équilibre est donc instable.

(c) Les racines de l'équation caractéristiques étant complexes, le mouvement est oscillatoire