# Contrôle d'algèbre

**Calculatrice, téléphone et matériels de cours/TD interdits**
**45 minutes**

Mardi 7 novembre 2017

## Exercice 1 : Questions de cours (1 points)

Soit $f$ une application linéaire qui vérifie $\dim(\text{Ker } f) = 0$. Que peut-on dire de $f$ ? On raisonnera sur les espaces de départ et d'arrivée.

## Exercice 2 : Système linéaire (5 points)

Résolvez le système linéaire suivant en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
(1-m)x + y + 2z &= 0 \\
2x + (1-m)y + z &= 0 \\
y + (3-m)z &= 0
\end{aligned}$$

## Exercice 3 : Application linéaire (10 points)

Soit $f(x, y, z) = (y + z, x + z)$.

a. Donnez les espaces de départ et d'arrivée. Justifiez que $f$ est une application linéaire.
b. Déterminez le noyau de $f$ et trouvez une base du noyau de $f$. Quelle est la dimension du noyau de $f$ ? Donnez une interprétation géométrique à vos résultats.
c. Énoncez le théorème du rang. Trouvez le rang de $f$ et une base de Im $f$.
d. $f$ est-elle injective, surjective, bijective ?
e. Quelle est la matrice représentative de $f$, $\mathcal{M}_f$ ? Quelle est la matrice transposée, ${}^t\mathcal{M}_f$ ? Calculez le produit $\mathcal{A} =^t \mathcal{M}_f \cdot \mathcal{M}_f$. $\mathcal{A}$ est-elle diagonalisable ?
f. Diagonalisez $\mathcal{A}$ et déterminez ses espaces propres : On donne $det\mathcal{A} = 0$. En déduire que 0 est valeur propre. Montrez que $P(\lambda) = \lambda(\lambda - a)(\lambda - b)$, $a$ et $b$ sont à déterminer. Classez les valeurs propres en ordre croissant. Les vecteurs propres sont à déterminer tel que la première composante non-nulle soit 1.
Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction d'une matrice diagonale $\mathcal{D}$ et d'une matrice de passage $\mathcal{P}$ (ne pas calculer $\mathcal{P}^{-1}$).

## Exercice 4 : Fonction de deux variables (4 points)

Soit $f(x, y) = e^{x^2+\sqrt{y}}$.

a. Calculez le gradient de $f$.
b. Calculez les dérivées secondes partielles de $f$.