Contrôle d'algèbre

Calculatrice, téléphone et matériels de cours TD interdits
45 minutes

Mercredi 19 octobre 2022

Exercice 1 : Question de cours (1 points)

Soit l'application linéaire $f : E \to F$. Démontrer que $Im\ f$ est un sev de F.

Exercice 2 : Système linéaire paramétré (6 points)

Soit $m \in \mathbb{R}$ et le système paramétré suivant :

$$\begin{cases} x + y - mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

$f(1,0,0) = 2 \quad 1 \quad 1$

a. Déterminez les valeurs critiques de m et identifiez les cas d'étude.

b. Sans calcul et en justifiant, déterminez la solution dans le cas unique si elle existe.

c. Résoudre le système pour les autres cas. Donnez une interprétation géométrique de vos résultats.

Exercice 3 : Application linéaire (10 points)

Soit $f(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y - z, x + y)$.

a. Justifiez que f est une application linéaire. Donnez les espaces de départ et d'arrivée.

b. Quelle est la matrice représentative de f, $\mathcal{M}_f$ dans la base $\mathcal{B}$?

c. Déterminez $Ker\ f$ et sa base. Quelle est sa dimension ? Donnez une interprétation géométrique.

d. Trouvez le rang de f par **deux** méthodes et exprimez une base de $Im\ f$. Donnez une interprétation géométrique de l'espace $Im\ f$.

e. f est-elle injective, surjective, bijective ?

f. Diagonalisez $\mathcal{M}_f$ et déterminez ses espaces propres. $\mathcal{M}_f$ est-elle diagonalisable ? Classez les valeurs propres par ordre décroissant. Les vecteurs propres sont à déterminer tel que la première composante non-nulle soit 1. Donnez une interprétation géométrique des espaces propres de $\mathcal{M}_f$. Exprimer $\mathcal{M}_f$ en fonction d'une matrice diagonale $\mathcal{D}$ et d'une matrice de passage $\mathcal{P}$. Calculez l'inverse de $\mathcal{P}$.

?

Exercice 4 : Fonction de deux variables (3 points)

Soit $f(x, y) = \dfrac{ln(x^2 - 1)}{e^{-2xy}}$.

a. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ? Représenter $\mathcal{D}_f$ graphiquement.

b. Calculez le gradient de f.