

On multiplie cette matrice de variance covariance par le poids de la composition

Matrice de la variance covariance pondérée

	Cléry	Tagada	Mara
Cléry	0,2304%	0,1920%	0,08%
Tagada	0,1920%	0,6400%	0,064%
Mara	0,08% =(1%*40%*20%)	0,064%	0,0784%

La variance du portefeuille est égale à la somme des cellules de la matrice de variance covariance pondérée

Exemple : 1,621%

CHAPITRE 10: LES BIENFAIT DE LA

DIVERSIFICATION

INTRODUCTION

La rentabilité et le risque sont des facteurs essentiels dans les processus de décision de portefeuille

SECTION 1 DIVERSIFICATION ET CORRÉLATION

La diversification consiste à répartir son investissement sur plusieurs titres de manière à en réduire le risque

étudions l'incidence du coefficient de corrélation sur un portefeuille composé des titres A et B

	Titre A	Titre B
Rentabilité	12%	12%
Ecart type	6%	6%

- Cas 1 : $PAB = 1$
 $\sigma_p^2 = 0,5^2 * 0,06^2 + 0,5^2 * 0,06^2 + 2*0,5 * 0,5 * 0,06 * 0,06 = 0,0036$
- Cas 2 $PAB = -1$
 $\sigma_p^2 = 0,5^2 * 0,06^2 + 0,5^2 * 0,06^2 - 2 * 0,5 * 0,5 * 0,06 * 0,06 = 0$
- Cas 3 $PAB = 0$
 $\sigma_p^2 = 0,5^2 * 0,06^2 + 0,5^2 * 0,06^2 = 0,0018$

- Cas 4 $PAB = 0,5$
 $\sigma^2_p = 0,0027$
- Cas 5 $PAB = -0,5$
 $\sigma^2_p = 0,0009$

SECTION 2 LA FRONTIÈRE EFFICIENTE

Un portefeuille composé de 2 titres

Soient deux titres A et B présentant un coefficient de corrélation égal à -0,5

$E(A) = 18\%$	$E(B) = 10\%$
$\sigma(A) = 11\%$	$\sigma(B) = 7\%$

La rentabilité du portefeuille est égale à :

$$R_p = h \times R_A + (1 - h)R_B$$

La variance du portefeuille est égale à

$$\text{Var}(R_p) = h^2 \times \text{Var}(R_A) + (1 - h)^2 \times \text{Var}(R_B) + 2h(1 - h) \times PAB \times \sigma_A \times \sigma_B$$

Etat	A	B	rentabilité	Ecart type
1	-10%		9,20%	8,3%
2	0%		10%	7%
3	10%		10,8%	5,83%
4	20%		11,6%	4,89%
5	30%		12,4%	4,33%
6	40%		13,2%	
7	50%		14%	
8	60%			
9	70%			
10	80%			
11	90%			
12	100%			
13	110%			

Quelle est l'incidence du coefficient de corrélation sur la courbe représentant le niveau de risque et de rentabilité de différents portefeuilles ? Plus le coefficient est important, plus la courbure est importante, avec un coefficient de -1 on peut obtenir un portefeuille dont le niveau de risque est nul.

La diversification démarre dès que les actifs ne sont pas strictement corrélés entre eux. Plus on intègre des titres négativement corrélés, plus le risque moyen est réduit.

On combine désormais le titre A avec un titre sans risque qui rapporte 3%. Le coefficient de corrélation est nul. On obtient alors une demi-droite.

Le cas de N titres

Pour un niveau de risque donné, l'investisseur retient la combinaison maximisant l'espérance de rentabilité ou inversement.

Frontière efficiente : c'est le lieu des portefeuilles qui délivre la plus forte espérance de rentabilité pour un niveau de risque donné.

Insérer graphique.

Formule analytique :

- Maximisation de l'espérance sous contrainte du risque
- Minimisation du risque sous contrainte d'un niveau de rentabilité donné.

Exemple : soit un portefeuille de 100 000 euros. L'espérance de rentabilité est de 8% en moyenne, et le risque minimum est de 6%. L'intervalle de confiance à 95% est :

$$IC = [-4\%; 20\%]$$

$$IC = [96000; 120000]$$

$$-4 = 8 - 2 * 6$$

et

$$20 = 8 + 2 * 6$$

Si on veut limiter son risque potentiel à 2000 euros, on achète seulement 50000 euros d'actifs financiers, et on place les 50 000 restant sur un titre sans risque mais moins rentable comme le livret A.

Espérance de rentabilité : $h + E(R_c) + (1-h)R_f$

Niveau de risque : $\sigma(R_p) = h * \sigma(R_c)$

$E(R_p) = R_f + (E(R_c) - R_f) \times (\sigma(R_p) / \sigma(R_c))$

Détermination analytique de la droite :

$$E(R_p) = R_f + \frac{[E(R_m) - R_f]}{\sigma(R_m)} \sigma(R_p)$$

SECTION 3 : DÉCOMPOSITION DU RISQUE

1) Le risque d'un titre financier

Le risque d'un instrument financier se compose de deux risques distincts.

- Le risque systémique
- Le risque spécifique

Ces deux risques sont des risques indépendants.

On peut démontrer que la variance des rentabilités d'un portefeuille de N titres vérifie l'équation suivante :

$$\sigma p^2 = \frac{1}{N}VAR + \frac{N-1}{N}COV$$

Plus le portefeuille est diversifié, plus le risque spécifique se rapproche de 0, le risque total du portefeuille se rapprochant du risque systémique symbolisé par une droite horizontale sur un graphique.

2) Les premiers modèles

L'idée est que les fluctuations du cours de bourse d'un titre peuvent être attribuées :

- D'une part à des facteurs communs qui affectent l'ensemble du marché
- D'autre part, à des causes spécifiques de la société cotée.

Apparition de modèles :

- Modèle de marché ou diagonal
- Modèle d'équilibre, MEDAF

Le modèle de marché : Les rentabilités de chaque titre sont plus ou moins liées à celles du marché .

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

Le modèle de marché :

Espérance de rentabilité :

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_m)$$

Niveau de risque :

$$\sigma^2_i = \beta_i^2 \sigma^2_m + \sigma^2_{e_i}$$

La covariance entre les taux de rentabilité de deux actifs i et j peut s'écrire

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma^2_m$$

Le modèle de MEDAF

Le modèle repose sur l'idée que l'espérance de rentabilité requise par un investisseur incorpore une prime de risque qui s'ajoute au taux sans risque.

$$E(R_i) = R_f + \text{prime } i$$

$$\rightarrow E(R_i) - R_f = \lambda \beta_i$$

Soit le portefeuille de marché :

$$E(R_m) = R_f + \lambda$$

$$E(R_m) - R_f = \lambda$$

On en déduit que :

$$E(R_i) = R_f + \beta_i [E(R_m) - R_f] \quad \text{avec} \quad \beta_i = \frac{COV(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)}$$

Les 3 hypothèses du MEDAF :

- Les investisseurs évaluent leur portefeuille à l'aide du critère d'espérance variance
- On admet l'existence d'un actif sans risque. Sa rentabilité est identique que l'on soit en situation de prêt ou d'emprunt.
- Les marchés de capitaux sont supposés parfaits. On suppose qu'il n'y a pas de coût de transaction ni d'impôt. Il est possible d'acheter et de vendre à découvert.
- Les anticipations en termes de rentabilité et de risques sont supposées homogènes.

Que signifie MEDAF ?

La rentabilité en excès espérée (prime de risque) d'un actif est proportionnelle à la rentabilité excédentaire proportionnelle du portefeuille de marché.

Cette proportion constitue le bêta de l'actif.

Exemple :

$$E(R_i) = R_f + B_i [E(R_m) - R_f]$$

$$E(R_m) = 9\% \text{ et } R_f = 5\%$$

Titre	Bêta
A	0.7
B	1
C	1.15
D	1.4
E	-0.3

$$E(R_a) = 0.05 + 0.7 (0.09 - 0.05) = 7.8\%$$

$$E(R_b) = 0.05 + 1 (0.09 - 0.05) = 9\%$$

$$E(R_c) = 0.05 + 1.15 (0.09 - 0.05) = 9.6\%$$

$$E(R_d) = 0.05 + 1.4 (0.09 - 0.05) = 10.6\%$$

$$E(R_e) = 0.05 + -0.3 (0.09 - 0.05) = 3.8\%$$

Cas pratique : cas COBALT

On vous communique le relevé pendant 12 mois consécutifs des cours de l'action Cobalt (A_i en euros) et d'un indice représentatif du marché boursier (M_i)

Mois i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cours A_i	577	569	527	587	583	596	621	656	673	657	693	709
Indice M_i	285	275	271	277	275	275	284	285	290	292	301	317

- 1) Que représente la droite caractéristique de l'action Cobalt ?
- 2) Quelle est l'équation de cette droite ?
- 3) Calculez le Bêta de l'action Cobalt.
- 4) Interprétez le résultat obtenu.

- 5) Calculez le risque total de l'action Cobalt.
- 6) Calculez le risque systémique de l'action Cobalt.
- 7) Déduisez-en son risque spécifique.

1) Cette notion fait référence au modèle de marché. Il permet, à partir de données passées, d'établir une relation entre la rentabilité d'une action et la rentabilité du marché dans sa totalité.

$$2) R_a = \beta R_m + \alpha$$

Avec : $B = \frac{COV(R_a, R_m)}{Var(R_m)}$ et α : ordonnée à l'origine de la droite.

Il s'agit dans un premier temps de calculer les rentabilités de l'action Cobalt et du marché.

Mois i	Ra	Rm
2	(569-577)/577= -1.39%	(275-285)/285= -3.51%
3	-7.38%	-1.41%
4	11.39%	2.21%
5	-0.68%	-0.72%
6	2.23%	0%
7	4.19%	3.27%
8	5.64%	0.35%
9	2.59%	1.75%
10	-2.38%	0.69%
11	5.48%	3.08%
12	2.31%	5.32%

Somme des Ra= 22

E(Ra)= 2% (22/11)

Somme des Rm= 10.99

E(Rm)=1% (=10.99/11)

Somme des Rm*Ra= 88.9746

E(Rm*Ra)= 8.0886%

$$COV(R_a, R_m) = E(R_a * R_m) - [E(R_a) * E(R_m)]$$

$$\text{Ici : } COV(R_a, R_m) = 8.0886 - (2 * 1) = 6.0886$$

IL s'agit dans un troisième temps de calculer la variance de la rentabilité de l'indice de marché.

Somme des (Rm)²= 71.9679

E[Rm]²= 6.5425%

$$\begin{aligned} VAR(R_m) &= E[(R_m)^2] - [E(R_m)]^2 \\ &= 6.5425 - 1^2 \\ &= 5.425 \end{aligned}$$

$$\sigma(R_m) = 2.354\%$$

Il est maintenant possible de calculer le B de l'action cobalt :

$$B = \text{COV}(R_a, R_m) / \text{Var}(R_m) = 6.0886 / 5.5425 = 1.0985$$

Il est légèrement supérieur à 1, ce titre a tendance à amplifier les fluctuations du marché.

$$\text{Somme des } (R_a)^2 = 288.6686$$

$$E[R_a]^2 = 26.2426\%$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}(R_a) &= E[(R_a)^2] - [E(R_a)]^2 \\ &= 26.2426 - 2^2 \\ &= 22.2426 \end{aligned}$$

$$\sigma(R_a) = 4.72\%$$

Le risque total d'une action se décompose en risque systémique et risque spécifique.

Le risque systémique est donné par :

$$\sigma(R_m)\beta = 2.354 * 1.0985 = 2.586\%$$

Le risque spécifique est donné par :

$$\sigma(e) = \sigma(R_a) - \sigma(R_m)\beta = 4.72 - 2.586 = 2.134\%$$

Les modèles supposent que la rentabilité d'un titre i est une fonction linéaire de m facteurs.

$$R_i = E(R_i) + [\text{somme } k=1 \rightarrow m (b_{ik} F_k + e_i)]$$

Le MEDAF est un modèle à facteur unique : le risque du marché est le seul facteur qui affecte l'espérance de rentabilité.

Peut-on déterminer plusieurs facteurs affectant la rentabilité ? Les modèles multifactoriels permettent l'inclusion de plusieurs sources de risques et donc plusieurs facteurs de risque.

Les modèles APT

Remarque : pour éviter les opportunités d'arbitrage, la relation entre l'espérance du taux de rentabilité et les risques systématiques, mesurés par les sensibilités, doit être linéaire.

Application numérique :

- VAD portefeuille C, avec Bêta = 0.5
- Création d'un portefeuille D de risque identique (bêta égal à 0.5)
- $D = 0.5 * A + 0.5 * \text{actif sans risque}$
- Opportunité d'arbitrage
 - o $0.5 * (10\% + 4\%) - 1 * 6\%$
 - o Gain sans risque : 1%

Quels sont ces facteurs communs ? Il existe plusieurs modèles :

Modèle à trois facteurs de FAMA et French

Ils ont constaté qu'en plus du risque de marché, il y'a deux types de facteurs. Deux types d'actions ont tendance à surperformer le marché :

- Small capitalisations
- High book-to-market Ratio.

Ils ont rajouté deux facteurs au MEDAF traditionnel

- SMB : petite capitalisation – grosse capitalisation

- HML : « high [book/market] minus low »

Le modèle de Cahart

Dans ce modèle, outre le facteur risque de marché, les facteurs de risques additionnels sont les rentabilités :

- Du portefeuille SMB
- Du portefeuille HML
- Du portefeuille momentum

Section 3 Décomposition du risque d'un actif

LE modèle de fama et French R