

Contrôle de Mathématiques L2 Eco- Gestion

Date : 25/10/2022

Durée : 45 minutes

Exercice 1 : 4 points

Soient f et g deux applications telles que : $f(x, y, z) = (x - 2y + z ; x - y)$ et $g(x, y) = (x + y - 2 ; 2x - y)$.

1. Laquelle de ces applications est une application linéaire ? Justifiez brièvement votre réponse en précisant son espace de départ et son espace d'arrivée.
2. Déterminez le noyau et le rang de cette application linéaire.
3. Est – elle injective ? bijective ? Surjective ?

Exercice 2 : 9 points

Soit A la matrice définie par : $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1. Pour quelles valeurs de α la matrice A est – elle inversible ?

Pour la suite de l'exercice on choisira $\alpha = 4$.

2. Quel est le déterminant et la trace de A
3. Calculez les valeurs propres de A (on notera λ_1 la plus petite valeur propre)
4. A quelles conditions la matrice A est – elle diagonalisable ?
5. Calculez les vecteurs propres associées aux valeurs propres.
6. A est – elle diagonalisable ? Si oui, trouvez les matrices P et D telles que $A = PDP^{-1}$ (On ne demande pas de calculer P^{-1}).
7. Donnez l'expression de A^n (on ne demande pas le calcul explicite de A^n).

Exercice 3 : 7 points

Soit $f(x, y)$ une fonction définie sur un ensemble E telle que , $f(x, y) = \ln (1 + x^2 y)$

1. Calculer les dérivées premières de f .
2. Calculez les dérivées secondes de f . Expliquez pourquoi pour $(x, y) \in E$, on a $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$
3. Trouvez le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(1 ; 0)$
4. Donnez une approximation affine de f en $(1 ; 0)$ note $\hat{f}_{(1,0)}$
5. Donnez une approximation quadratique de f en $(1 ; 0)$ note $\tilde{f}_{(1,0)}$