

CHAP II. MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

OBJECTIFS :

- Maîtriser l'impact du « temps » sur les opérations financières pour être en capacité de prendre des décisions financières en appréciant leur rentabilité et les risques associés
- Pouvoir calculer un taux d'intérêt simple et un taux d'intérêt composé
- Comprendre et distinguer la logique des opérations d'actualisation et de capitalisation
- Faire la différence entre le taux actuel d'un emprunt ou d'un placement et le Taux Effectif Global (TEG) et savoir calculer les taux équivalents (passage de l'un à l'autre) et de déterminer le coût exact d'un financement ou la valeur d'un actif financier

La culture financière laisse à désirer, notamment par rapport aux pays anglo-saxons, qui sont largement mieux informés que la population française sur les principes financiers. Les français ont également du mal à faire des calculs financiers simples, pouvant être utiles dans la vie quotidienne.

I. Les principes de bases du trésorier

Il est important d'adapter un langage commun en finance et dans le domaine de la banque, afin d'être sûr de comprendre et d'être compris.

L'assimilation du langage du Trésorier permet d'échanger avec ses partenaires bancaires afin de :

- Partager une vision commune d'un financement et des frais financiers correspondants et donc de négocier
- Décider et arbitrer entre des projets, des solutions de financement, ...
- De gérer son budget personnel, ses revenus, ses dépenses

Tout d'abord la référence de base : **le nombre de jours dans une année**

- **360 jours** (année lombarde : 12 x 30 jours)
 - Supports du marché monétaire (pensions, ...)
 - Titres de Créances Négociables (TCN) émises à moins d'un an, Bons du trésor, certificats de dépôts, Billets de trésorerie, Bons de sociétés financières (sauf billet à ordre négociable)
- 365 jours et 366 jours pour les années bissextiles
 - Produits obligatoires quelle que soit leur maturité
 - Les TCN émises à plus d'un an

Les TCN (Titres de Créances Négociables) regroupent les **bons du trésor** (titres de dettes émis par l'État), les **certificats de dépôts** (titres de dettes émis par les banques) et les **billets de trésorerie** (titres de dettes émis par les entreprises).

Il faut faire attention aux emprunts à taux d'intérêts extrêmement rentables d'apparence : certains frais financiers peuvent être cachés, et il vaut mieux demander un draft de contrat (proposition), dans lequel l'on peut vérifier le calcul de référence et les frais financiers.

Il y a 1.39% de différentiel entre un taux d'intérêt exprimé sur 360 jours et celui sur 365 jours : l'emprunt coûtera alors 1.4% de plus.

Cas pratique :

J'emprunte 1000€ à 10% pendant 91 jours base 365.

Quel est le montant des intérêts simples versés base 365 et base 360 ?

montant emprunté	1000		
Taux d'intérêt simple	10%		
Durée en jours	91		
Intérêts base 365	$1000 \times 10\% \times 91 / 365 =$	24,93	
Intérêts base 360	$1000 \times 10\% \times 91 / 360 =$	25,28	
Impact	$(365 / 360) - 1 =$	1,39%	

Les intérêts base 360 sont toujours supérieurs aux intérêts base 365.

II. Le taux d'intérêt

Les taux d'intérêt permettent de :

- Calculer le coût d'un financement et les frais financiers correspondants
- Pouvoir comparer des valeurs à des périodes temporelles différentes

Plusieurs définitions du taux d'intérêt pour des utilisations différentes :

- Intérêts simples / intérêts composés et taux équivalents
- Intérêts précomptés / intérêts postcomptés et taux équivalent
- Taux d'intérêt réel / taux d'intérêt nominal

1. Le taux d'intérêt simple

Principes	Les intérêts simples ne sont pas générateurs eux-mêmes d'intérêts. Seul le capital investi porte intérêt.
Utilisation	Durée de l'opération < 1 an Proportionnel à la durée totale du prêt ou du placement Versés en une seule fois , au début ou fin de période Le taux d'intérêt et le nombre de périodes doivent être exprimés dans la même unité de temps.
Formules à retenir	C = montant du Capital investi (emprunté ou placé) i (annual interest rate) = taux d'intérêt annuel pour une période n = nombre de périodes base 360 jours ou 12 x 30 jours I_n = Montant des intérêts simples VF_n : Valeur Future $I_n = C \times i \times n$ $VF_n = C + I_n = C \times (1 + i \times n)$

Application numérique :

Placement de 10 000€ pendant **6 mois** au taux d'intérêt mensuel de 2%.

Quelle est la Valeur Future de ce placement ?

1. Poser l'énoncé	Capital Investi C = 10 000 € Taux d'intérêt mensuel i = 2% Durée du Placement : nombre de périodes n = 6 VF_n = Valeur Future ?
2. Résoudre l'équation	Montant des intérêts simples = I_n $I = C \times i \times n = 10\,000\text{€} \times 2\% \times 6 = 1\,200$ Valeur Future : $VF_n = C + C \times i \times n = C \times (1 + i \times n)$ $VF = 10\,000\text{€} + (10\,000\text{€} \times 2\% \times 6) = 11\,200\text{€}$

Principes d'application :

- Opérations de court terme (marché monétaire, affacturage) : Taux annuel calculé sur 360 jours et non 365 jours soit une **majoration** du taux d'intérêt de 365/360.
 - **Exemple** : Un taux d'annuel de 5% coûte en réalité $5\% \times 365/360 = 5.069\%$ sur une base 360 jours
- Application pratique : Emprunt de 100 000 € à la banque **du 15/07/15 au 30/09/2015**

Taux d'intérêt annuel $i = 5\%$

Nombre de jours de l'emprunt = $16 + 31 + 30 = 77$ Jours Intérêt dû = $100\,000\text{€} \times 5\% \times 77/360 = 1\,069,44\text{€}$
soit un taux annuel qui passe de 5% à 5,069%

Principes	
Le taux proportionnel	Sur la base d'intérêts simples (<1 an) , le taux proportionnel permet de passer d'un taux annuel à un taux mensuel ou trimestriel, ...
Formule	On calcule le taux mensuel proportionnel au taux annuel
Formule	$\text{Taux annuel} = i_{\text{annuel}}$ $\text{Taux mensuel} = i_{\text{mensuel}} = i_{\text{annuel}} / \text{nb de période dans l'année (12)}$ $\text{Taux trimestriel} = i_{\text{trimestriel}} = i_{\text{annuel}} / \text{nb de période dans l'année (4)}$
Application	Taux annuel $i = 6\%$ Taux mensuel $= i_{\text{mensuel}} = 6\% \times 1 / 12 = 0,005$ ou 0,5% Taux trimestriel $= i_{\text{trimestriel}} = 6\% / 4 = 1,5\%$ *** Quel est le montant des intérêts payés si j'emprunte 1000€ pendant 3 mois au taux annuel de 4% (annuel) Montant de l'emprunt : $C = 1\,000\text{€}$ $i = 4\%$ (annuel) $i_{\text{trimestriel}} = 4\% / 4$ Montant des intérêts trois mois $= I = 1\,000 \times 4\% / 4 \times 3 = 30\text{€}$

- Intérêts simples et taux proportionnels

En général, si le taux d'intérêt simple de référence est de $x\%$ par an, composé de n périodes de temps par an, alors le taux réel effectif du taux d'intérêt est de : $i_{\text{proportionnel}} = \frac{i_{\text{annuel}}}{n}$

- Cas pratique d'application :

Pour un taux annuel de 12%, le taux proportionnel mensuel est de 1%; le taux proportionnel semestriel est de 6%.

2. Le taux d'intérêt composé

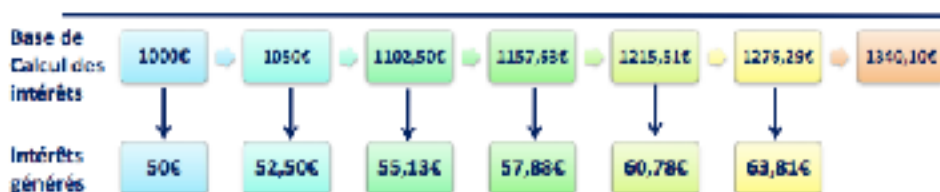
Hypothèses structurantes :

- Le taux d'intérêt reste constant sur la période de l'opération d'emprunt ou de placement : l'hypothèse retenue est de pouvoir replacer les intérêts perçus sur la période de l'opération au taux initial
- Le taux d'intérêt est le même quelque soit l'échéance de l'opération : un montant placé sur 5 ans est placé au même taux annuel qu'une somme placée pour un an.
- La structure des taux est « flat » : les taux sont les mêmes quelque soit l'horizon de temps.

Définition	Les Intérêts composés sont générateurs de taux d'Intérêts qui s'ajoutent au capital en fin de période et produisent eux-mêmes des intérêts. L'intérêt est capitalisé, il est ajouté au capital et il produit des intérêts.
Utilisation	Durée de l'opération est supérieure à un an et calculé à terme échu L'intérêt perçu par le créancier peut être placé pendant la durée restante de l'opération et porte ainsi lui-même intérêts
Formule	C = montant du Capital (emprunté ou placé) : i (annual interest rate) = taux d'intérêt annuel pour une période n = nombre de périodes Valeur Future : $VF_n = C \times (1 + i)^n$

Représentation graphique des intérêts composés :

Vous placez 1000€ à 5% annuel sur 5 ans.



Vérification :

- $C = 1000$
- $i = 5\%$
- $n = 5$

Valeur Future : $VF_n = 1000 \text{ €} \times (1 + 5\%)^5 = 1340,10\text{€}$

La somme des intérêts $I = VF_n - C = 1340,10\text{€} - 1000\text{€} = 340,10\text{€}$

Deux règles sont à respecter lors de l'application de cette formule :

- Les paramètres doivent être exprimés dans la même unité. Si le taux d'intérêt est mensuel, le nombre de périodes doit représenter un nombre de mois.
- L'application d'intérêts composés à un calcul se fait sur le **nombre de jours exact** de l'année soit 365 jours. Le 1er trimestre = 31+28+31 = 90 jours (91 en année bissextile)

La Valeur Future avec intérêts composés est toujours supérieure à la Valeur Future calculée avec intérêts simples (si $n > 1$).

Principes	
Le taux équivalent	Sur la base d'intérêts composés ($>1 \text{ an}$), le taux équivalent permet de calculer un taux mensuel ou trimestriel, ... à partir d'un taux d'intérêt annuel surtout si les remboursements se font par mensualités ou trimestrialités... ou inversement un taux d'intérêt annuel à partir d'un taux mensuel ou trimestriel, ...
Formule	Deux taux sont équivalents s'ils conduisent à la même Valeur acquise pour un taux de placement identique.
Formule	$\text{Taux annuel} = i_{\text{annuel}}$ $\text{Taux Périodique} = i_k$ $(1 + i_{\text{annuel}}) = (1 + i_k)^k$ $i_{\text{annuel}} = (1 + i_k)^k - 1$ $i_k = (1 + i_{\text{annuel}})^{1/k} - 1$
Application	Quel est le taux annuel équivalent à un taux mensuel de 0,6% et le taux trimestriel équivalent à un taux annuel de 5,5% ? $i_{\text{annuel}} = (1 + i_k)^k - 1 = (1 + 0,6\%)^{12} - 1 \sim 7,44\%$ $i_1 = (1 + i_{\text{annuel}})^{1/12} - 1 = (1 + 5,5\%)^{1/12} - 1 \sim 1,35\%$

Fréquence de Capitalisation et coût

Cas pratique : Votre banque met à votre disposition une carte de crédit qui fixe un taux d'intérêt annuel de 20%. Quel est le taux réel qui vous sera appliqué si vous ne payez pas à temps ?

Nombre de période n	Fréquence de capitalisation	Taux Effectif annuel
1	Annuelle	20%
2	Semestrielle	$(1+20\%/2)^2-1 = 21\%$
4	Trimestrielle	$(1+20\%/4)^4-1 = 21,55\%$
12	Mensuelle	$(1+20\%/12)^{12}-1 = 21,94\%$
52	Hebdomadaire	$(1+20\%/52)^{52}-1 = 22,09\%$
365	Journalière	$(1+20\%/365)^{365}-1 = 22,13\%$
∞	Continue	$e^{(20\%)}-1 = 22,14\%$

La fréquence de capitalisation (fréquence à laquelle on effectue les versements) **a un impact sur le taux** : si on rembourse en une fois, ce sera à 20%, mais plus la fréquence de remboursement est élevée, plus le taux sera élevé. À la banque, on parle de taux annuel avec un remboursement mensuel, car c'est moins risqué de laisser une personne rembourser en une fois que de le laisser rembourser mensuellement.

Taux annuel et taux exprimé en n périodes :

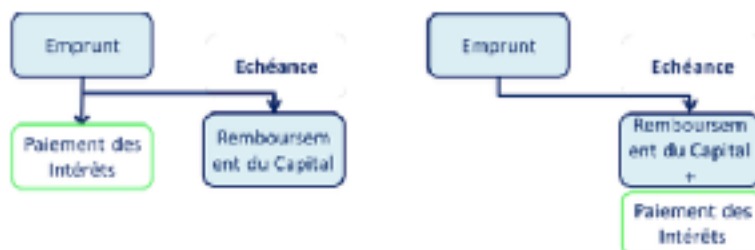
En général, si le taux d'intérêt composé de référence est fixé à x% par an, composé de n périodes de temps par an, alors le taux réel effectif du taux d'intérêt est de :

$$t_{\text{effectif}} = \left(1 + \frac{t_{\text{reference}}}{n}\right)^n - 1$$

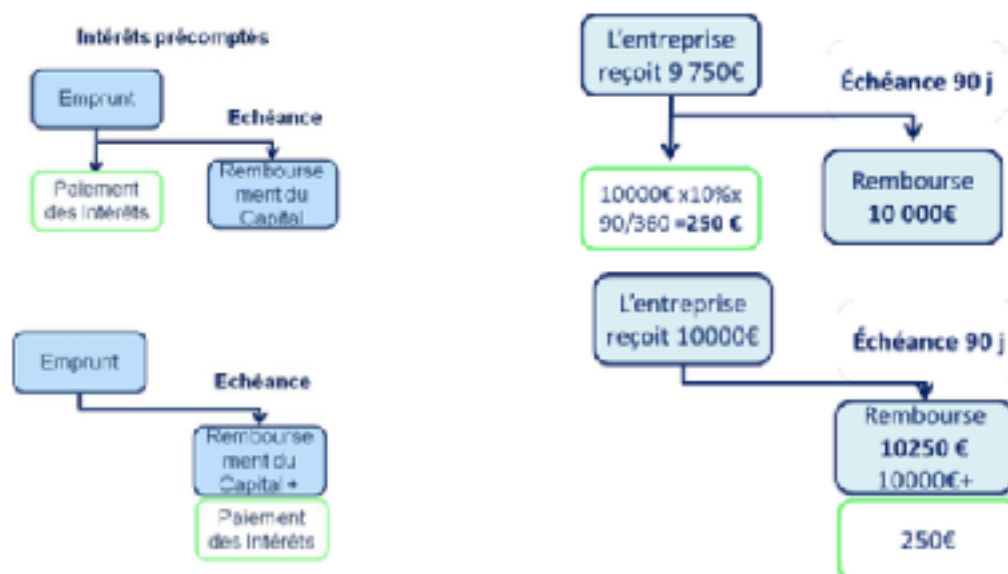
Le taux d'intérêt effectif comparé au taux d'intérêt de référence annuel croît avec le nombre de périodes de capitalisation des intérêts

3. Le taux d'intérêt précompté et postcompté

Principes	
Terme échu ou postcompté	Intérêts dus en fin de période (à l'avantage de l'emprunteur)
Terme à échoir ou précompté	Intérêts dus en début de période (à l'avantage du prêteur) Le capital mis à disposition de l'emprunteur est minoré du montant des intérêts dus et versés lors de la mise en place de l'emprunt



Une entreprise emprunte 10 000 pour une durée de 90 jours au taux annuel de 10%. Le taux d'intérêt retenu est le taux d'intérêt simple (<1an).



- Le taux d'intérêt équivalent (TIE)

La somme versée à l'emprunteur **diffère selon le mode de calcul précompté ou postcompté**. Aussi, il est nécessaire de calculer un **Taux d'intérêt Equivalent (TIE)** correspondant au taux calculé sur la somme réellement empruntée. Le taux d'intérêt postcompté équivalent au taux d'intérêt précompté est obtenu par le Taux d'Intérêt Equivalent (TIE).

Lorsque les intérêts sont précomptés, la somme réellement empruntée est de $C - I$, avec $I = C \times i \times n$.

Si TIE est le taux appliqué à la somme réellement perçue :

$$\begin{aligned}
 I &= (C - I) \times \text{TIE} \times n \Leftrightarrow \text{TIE} = \frac{I}{(C - I)} \times \frac{1}{n} \\
 \Leftrightarrow \text{TIE} &= \frac{C \times i \times n}{C(1 - i \times n)} \times \frac{1}{n} \\
 \Leftrightarrow \text{TIE} &= \frac{i}{(1 - i \times n)}
 \end{aligned}$$

Cas Application pratique TIE :

Une entreprise place 50 000€ au **taux d'intérêt précompté de 5,6% par an** pendant **5 mois**.

- Quel est le taux postcompté équivalent à ce taux précompté de 5,6% ?

Avant de faire le calcul, le taux postcompté sera-t-il supérieur ou inférieur au taux précompté ?

Le taux postcompté sera supérieur au taux précompté pour qu'il y ait équivalence de taux d'intérêt.

$$\text{TIE} = \frac{i_{\text{pré}}}{(1 - i_{\text{pré}} \times n)} = \frac{5,60\%}{1 - 5,6\% \times 5/12} = 5,73\%$$

4. Taux d'intérêt réel et taux d'intérêt nominal

Le Taux d'intérêt nominal est le **taux qui apparaît sur le contrat**, correspondant au rendement de l'argent.

Le Taux d'intérêt nominal peut être :

- **Fixe** : Pas d'évolution sur la durée du contrat
- **Variable** : Évolution retenue sur la base d'une variable prise comme référence comme l'inflation ou le taux d'intérêt interbancaire CT (Euribor)

L'inflation profite souvent à l'emprunteur et pénalise le prêteur.

Le taux d'intérêt réel est le **taux d'intérêt nominal corrigé de l'inflation** exprimé en euros constants.

$$\begin{aligned}
 1 + \text{taux réel} &= \frac{1 + \text{taux nominal}}{1 + \text{taux d'inflation}} \\
 \text{taux réel} &= \frac{\text{taux nominal} - \text{taux d'inflation}}{1 + \text{taux d'inflation}} \\
 \text{Si taux inflation faible} \\
 \text{taux réel} &\sim \text{taux nominal} - \text{taux d'inflation}
 \end{aligned}$$

Cas pratique d'application :

Calculer le coût réel d'un emprunt à 10% annuel, lorsque l'inflation est à 8% et lorsque le taux d'inflation est à 2% ?

$$\text{taux réel} = \frac{\text{taux nominal} - \text{taux d'inflation}}{1 + \text{taux d'inflation}}$$

• Cas 1 : Taux réel = $\frac{(10\% - 8\%)}{1 + 8\%} = 1,85\%$

• Cas 2 : Taux réel = $\frac{(10\% - 2\%)}{1 + 2\%} = 7,84\%$

III. Time value of money -Valeur temps de l'argent

Le taux d'intérêt rémunère et couvre :

- **Le temps** : « Loyer de l'argent qui sera rendu dans des conditions contractuelles définies » (montant-taux-durée)
- **L'inflation** : Le prêteur voudra se couvrir contre l'inflation (le taux réel étant fonction de l'inflation) d'autant plus que la durée est longue donc plus incertaine
- **Le risque**

Principe de base : un Euro 2015 ≠ un Euro 2016... ≠ Un Euro 200n

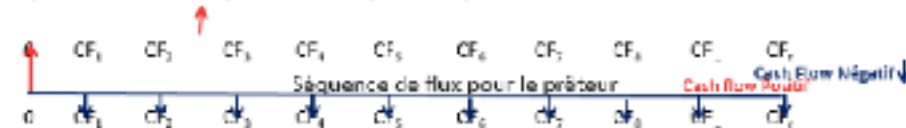
1. Détermination des flux - Cash Flow

La séquence de flux

Un emprunt se caractérise par **une ou plusieurs entrées de fonds** correspondant au **capital emprunté** puis par **des sorties de fonds** correspondant aux **paiements des intérêts et au remboursement du capital**. Chaque flux monétaire est nommé **Cash Flow**.

En considérant une seule entrée de fonds, la séquence de flux se note $(CF_0; CF_1; \dots; CF_n)$, avec $CF_0 > 0$ et $CF_i < 0$ pour i allant de 1 à n .

CF_0 Cash Flow Positif Séquence de flux pour l'emprunteur



CF_0 Cash Flow Négatif



Un Cash Flow positif

signifie qu'il y a **plus d'entrées que de sorties de fonds** : tout se déroule bien et l'entreprise peut répondre à toutes ses obligations. Certaines entreprises profitent même d'un cash-flow positif pour payer au comptant leurs fournisseurs, mais en demandant une réduction en

échange. De cette façon, elles obtiennent un rendement supplémentaire et créent une spirale positive.

Un Cash Flow négatif signifie qu'il y a **plus de sorties que d'entrées de fonds** : il faut alors prendre des emprunts pour pouvoir remplir les obligations financières. Une spirale négative peut se mettre en place, dont il est très difficile d'en sortir.

2. La Capitalisation

• Capitalisation d'un flux unique

La **capitalisation** représente la valeur future d'un capital investi.

Récapitulatif de l'utilisation des taux d'intérêt pour calculer la Capitalisation d'un flux nominal unique

	Intérêt Simple	Intérêt Composé
Application	Emprunt/Placement < 1 an	Emprunt/Placement > 1 an
Principe	Seul le Capital génère des intérêts	Les intérêts sont réinvestis et génèrent aussi des intérêts
Base de calcul	360 jours par an	365 jours par an
Modification de la fréquence temporelle	Par le taux proportionnel	Par le taux équivalent
Formule Générale de la Valeur Future VF_n	$VF_n = C \times (1 + i \times n)$ <i>(n=nb. de périodes)</i>	$VF_n = C \times (1 + i)^n$ <i>(n= nombre d'années)</i>

Calculer la Valeur Future d'un Placement de 1000 € à 10% au bout de 10 périodes.

1. Avec la méthode des intérêts simples

$n = 10$ périodes soit < 1 an

Formule : $VF_n = C \times (1 + i \times n)$

$$VF_n = 1000 \times (1 + 10\% \times 10 \text{ mois}/12 \text{ mois}) = 1\,083,33 \text{ €}$$

2. Avec la méthode des intérêts composés

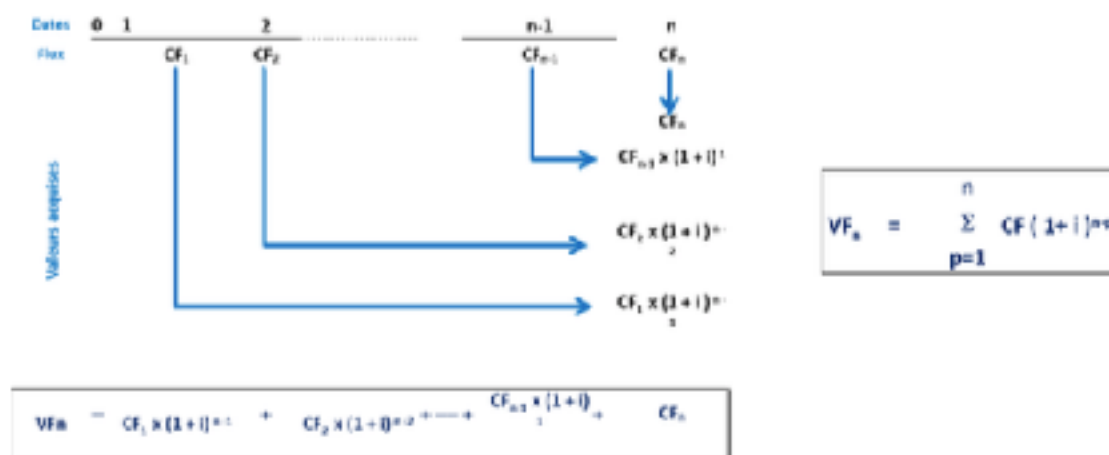
$n = 10$ périodes soit > 1 an

Formule : $VF_n = C \times (1 + i)^n$

$$VF_n = 1000 \times (1 + 10\%)^{10} = 2\,593,74 \text{ €}$$

• Capitalisation d'une suite de flux en fin de période

Afin de constituer un Capital, l'investisseur peut décider de constituer à intervalles réguliers des versements identiques ou non sur une périodicité annuelle, semestrielle, trimestrielle, mensuelle,... On parle alors d'annuités, semestrialités, trimestrialités, mensualités...



○ Application pratique

Placement sur 5 ans en fin de période au taux de 2,15%

$$VF_n = \sum_{p=1}^n CF(1+i)^{n-p}$$

Année	0	1	2	3	4	5	6	
Placement		100	200	250	350	0	400	
Taux annuel 2,15%								
						1an	$0 \times (1 + 2,15\%)^1$	Pas de Capl.
					2ans		$150 \times (1 + 2,15\%)^2$	
				3ans			$250 \times (1 + 2,15\%)^3$	
			4ans				$200 \times (1 + 2,15\%)^4$	
		5ans					$100 \times (1 + 2,15\%)^5$	

Capitalisation d'une suite de flux de début de période

$$VF_n = \sum_{t=0}^{n-1} CF_t \times (1+i)^{n-t}$$

Année	0	1	2	3	4		
Placement	150	200	0	325			
Taux annuel 1,75%							
				1 période	$325 \times (1 + 1,75\%)^1$		
			2 périodes		$0 \times (1 + 1,75\%)^2$		
		3 périodes			$200 \times (1 + 1,75\%)^3$		
	4 périodes				$150 \times (1 + 1,75\%)^4$		
	soit VF = $150 \times (1 + 1,75\%)^4 + 200 \times (1 + 1,75\%)^3 + 0 \times (1 + 1,75\%)^2 + 325 \times (1 + 1,75\%)^1$						

3. L'actualisation

La **Capitalisation** permet de déterminer la **Valeur Future** d'un **Cash Flow** ou d'une **séquence de Flux**.

L'**actualisation** permet de connaître la **Valeur actuelle** d'une somme de **Cash Flow**.

Ce calcul permet de répondre à la question :

Quelle somme doit être placée aujourd'hui pour disposer d'une somme de Cash Flow définie dans le Futur ?



- Valeur actuelle - Valeur acquise

Valeur actuelle :

La somme C_0 qu'il faut placer pendant n périodes au taux d'intérêt i pour obtenir le Capital C_n soit :

$$C_0 = C_n (1+i)^{-n} \quad C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Valeur acquise :

C_n est appelé **valeur acquise** pour un capital C_0 placé pendant n périodes au taux d'intérêt i :

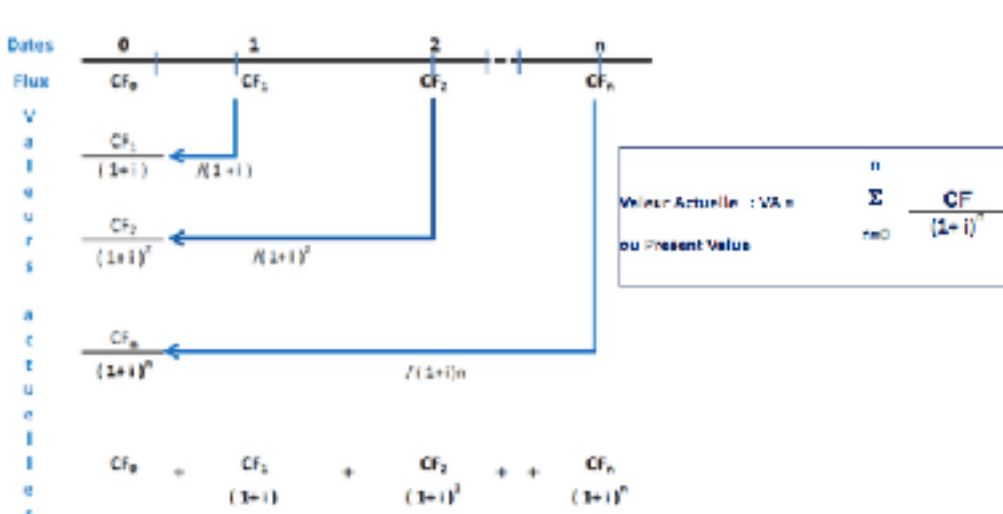
$$C_n = C_0 (1+i)^n$$

- L'actualisation d'un flux unique

L'actualisation permet de connaître la **valeur actuelle d'une somme de Cash Flow** dont le versement s'effectue en **fin de période**.

Récapitulatif de l'utilisation des taux d'intérêts pour calculer l'actualisation d'un flux unique

	Intérêt Simple	Intérêt Composé
Application	Emprunt/Placement < 1 an	Emprunt/Placement > 1 an
Principe	Seul le Capital génère des intérêts	Les intérêts sont réinvestis et génèrent aussi des intérêts
Base de calcul	360 jours par an	365 jours par an
Modification de la fréquence temporelle	Par le taux proportionnel	Par le taux équivalent
Formule Générale de la Valeur Actuelle VA_n	$VA_n = \frac{CF_n}{(1+i \times n)}$ (n =nb de périodes)	$VA_n = \frac{CF_n}{(1+i)^n}$ ou $CF \times (1+i)^{-n}$ (n = nombre d'années)



Quelle est la valeur

actuelle, en t_0 de flux de trésorerie futurs ?

Hypothèse sous-jacente : Un capital disponible en t_0 est placé un taux d'intérêt i %

Cas pratique d'application :

Recevoir 10 500 € dans 1 an sachant que le taux d'intérêt (ou taux d'actualisation) est 5% est identique à recevoir aujourd'hui :

$$10\,500 / (1 + 5\%) = 10\,000$$

Généralisation :

$$\text{Valeur actuelle (VA)} = CF_1 / (1 + i\%) + CF_2 / (1 + i\%)^2 + \dots + CF_n / (1 + i\%)^n$$

Vous souhaitez acquérir un bien immobilier et contracter un emprunt remboursables par mensualités constantes sur 20 ans. Sachant que votre capacité de remboursement mensuel est de 1 300 €, et que le banquier vous propose un taux d'intérêt annuel de 3%

Combien pouvez-vous emprunter ?

Réponse:

1. Détermination du taux mensuel équivalent

on sait que	$(1 + ia) = (1 + im)^{12}$
	$im = (1 + ia)^{1/12} - 1$
	$im = (1 + 3\%)^{1/12} - 1$
	$im = 0,25\%$

2. Détermination de la capacité d'emprunt

$$VA = \frac{CF \times (1 - (1 + i)^{-n})}{i}$$

$$VA = 1300 \times \frac{1 - (1 + 0,25\%)^{-240}}{0,25\%}$$

$$VA = 1300 / (1 + 0,25\%) + 1300 / (1 + 0,25\%)^2 + \dots + 1300 / (1 + 0,25\%)^{240} = 234\,404 \text{ €}$$

4. Les rentes perpétuelles / les annuités

- **Les rentes perpétuelles** sont des emprunts (d'Etats) pour lesquels l'émetteur n'est tenu de rembourser (uniquement) que le montant des intérêts.
- **Une annuité** est une suite de règlements effectués à intervalles égaux.
Par définition, une annuité correspond – étymologiquement – à une périodicité annuelle, ..., une mensualité à une période mensuelle.
- **Les montants correspondants** sont des flux de trésorerie positifs ou négatifs ou Cash Flow.
- Une suite d'annuités représente une **rente temporaire** lorsque **le nombre d'annuités est fini (connu)**, **perpétuelle** lorsque le nombre de termes est **infini**.

Pour calculer une rente, il est indispensable de connaître les éléments suivants :

- La valeur de chaque flux (Cash Flow) ou sa référence (EBITDA, multiple de l'EBITDA,...)
- Le nombre de flux de trésorerie
- La périodicité des versements
- Le nombre de périodes entre l'origine et le premier versement

5. La Valeur Actuelle Nette - VAN ou Taux Actuariel

Son Utilisation : Valorisation de projet, Calcul de rentabilité d'un investissement

On parlera de **Valeur Actuelle Nette** ou (**Net Present Value – NPV**) lorsque l'origine de la suite est un nombre < 0

Cela consiste à **actualiser les cash flows** prévisionnels d'un projet d'investissement, c'est à dire à **ramener leur valeur à l'époque zéro et à en faire la somme.**

L'investissement dont la valeur actuelle nette sera la plus élevée sera considéré comme le plus rentable.

Au préalable devra être défini **le taux d'actualisation ou taux actuariel.**

$$VAN = -I + \sum_{p=1}^n CF_p \times (1+i)^{-p}$$

Avec I : montant de l'investissement
i = taux de rentabilité exigé
CF = Cash Flow prévisionnel

Cas pratique

J'achète un bien immobilier de 1 000 € pour des Cash Flow estimés annuels (dans tableau ci-dessous)

Le Taux actuariel correspondant au taux de rentabilité exigé par l'actionnaire est de 8%.

Rappel de la Formule : $VA(CF_t) = \sum CF_t \times (1 + 8\%)^{-t}$

	t	0	1	2	3	4	5	Σ Cash Flows
Montant de l'investissement	-1	-1000						-1 000
Cash Flow estimé			200	240	300	340	400	
Cash Flow actualisé	8%		185	205	238	250	272	1 151
Valeur Actuelle Nette - VAN								151

- Pour un taux actuariel de 8%, la VAN est de 151, soit un montant supérieur à 0.
- Ce qui veut dire qu'avec ce taux de rentabilité, l'investissement crée de la valeur (151).
- En revanche si le taux était de 15 %, l'investissement serait il rentable ?
- Le Taux actuariel correspondant au taux de rentabilité exigé par l'actionnaire est de 15%.
- Rappel de la Formule : $VA(CF_t) = \sum_{t=1}^n CF_t \times (1 + 15\%)^{-t}$

	t	0	1	2	3	4	5	Σ Cash Flows
Montant de l'investissement	-1	-1000						-1 000
Cash Flow estimé			200	240	300	340	400	
Cash Flow actualisé	15%		174	182	197	194	199	946
Valeur Actuelle Nette - VAN								-54

- Pour un taux actuariel de 15%, la VAN est de - 54, soit un montant inférieur à 0.
 - Ce qui veut dire qu'avec ce taux de rentabilité, l'investissement détruit de la valeur.
 - Cet investissement avec cette exigence de rentabilité n'est pas rentable.
- Conclusion : Plus le taux de rentabilité est faible, plus le projet devient rentable.
- Quel est le taux de rentabilité de cet investissement avec cette chronique de Cash Flow ?

- Le Taux de Rentabilité Interne - TRI

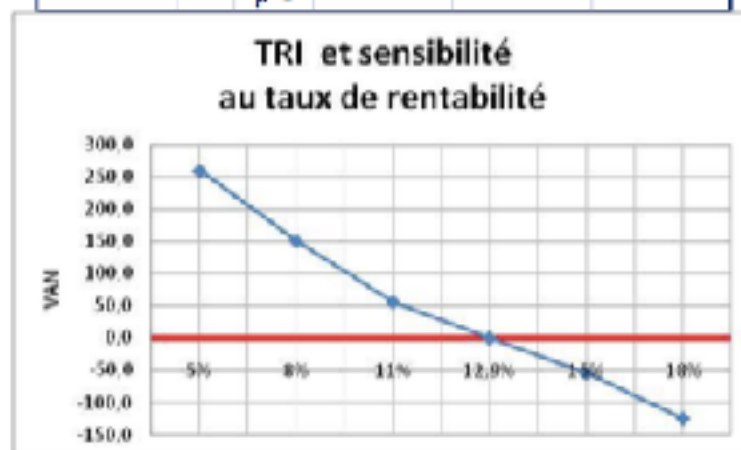
- Le Taux de Rendement Interne TRI ou Taux de Rendement Actuariel ou IRR (Internal Rate of Interest est le Taux qui annule la VAN

$$VAN = -I + \sum_{p=1}^n CF \times (1+i)^{-p} = 0$$

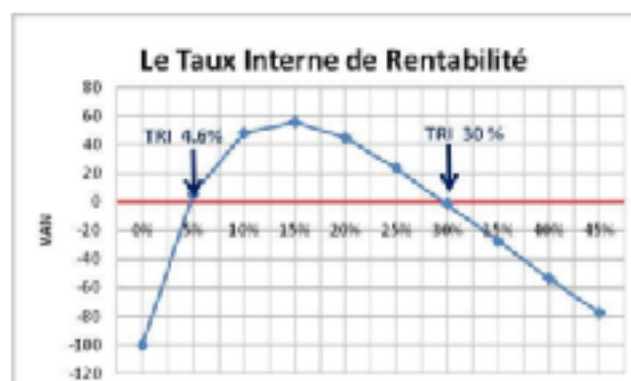
	0	1	2	3	4	5	Σ Cash Flows
Montant de l'investissement	-1000						-1 000
Cash Flow estimé		200	280	300	340	400	
Cash Flow actualisé 12,9%		177	188	208	209	218	1 000
Valeur Actuelle Nette - VAN							0

TRI = i tel que $VAN(i\%) = 0$ avec $-I_0 + \sum_{p=1}^n CF_p (1+i)^{-p} = 0$

$$VAN = -I + \sum_{p=1}^n CF \times (1+i)^{-p} = 0$$



- Limite du Taux de Rendement Interne TRI ou Taux de Rendement Actuariel ou IRR (Internal Rate of Interest) : plusieurs CF pour lesquels $I > CF$
- Il est donc préférable de rester sur le Calcul de la VAN créatrice de valeur ou non.



IV. EXERCICES

1. Vous placez 10000 € sur **4 ans** au taux annuel de 5%. Quel est le montant des intérêts que vous percevrez ?

○ Correction

La durée du placement est **supérieure à 1 an**.

On utilise donc les intérêts composés.

- C= Capital
- Durée n = 4 ans
- Taux d'intérêt annuel = 5 %
- I = ?
- Formule montant des intérêts : $I = C * (1 + i \%)^n - C$

○ Soit :

$$10\,000\text{€} \times (1 + 5\%)^4 - 10\,000\text{€} = 2\,154,06\text{€}$$

2. Vous placez 10000 € pendant **3 mois** au taux annuel de 4%. De quelle somme disposez vous après 3 mois ?

○ Correction

La durée du placement est **inférieure à 1 an**.

On utilise donc le **taux d'intérêt simple**.

- C= Capital
- Durée n = 3 mois
- Taux d'intérêt annuel = 4 %

○ Formule montant des intérêts : $I = C \times i \times n$

○ Mais le taux d'intérêt i et le nombre de périodes doivent être impérativement exprimés **dans la même unité de temps**.

○ Donc on transforme le taux intérêt annuel en taux d'intérêt mensuel par le taux proportionnel

○ Taux d'intérêt $i_{\text{mensuel}} = ?$

○ $i_{\text{mensuel}} = i_a / \text{nombre de mois} = 4\% / 12 = 0,3333\%$

○ montant des intérêts I = ?

$$I = 10\,000\text{€} \times 0,3333\% \times 3 = 100\text{€}$$

○ Soit un capital de **10 100 €** après 3 mois

3. Quel Le taux annuel équivalent à un taux mensuel de 0,5% ?

○ Correction :

On fait référence **au taux équivalent lorsqu'il s'agit d'intérêts composés**

Deux taux sont équivalents s'ils vérifient l'équation :

$$\text{○ } (1 + i_a) = (1 + i_m)^{12}$$

$$\text{○ } i_a = (1 + i_m)^{12} - 1 = (1 + 0,5\%)^{12} - 1 = 6,17\%$$

○ Ordre de grandeur

- Si le taux était proportionnel le taux annuel serait de $0,5\% \times 12 = 6\%$

○ Un taux annuel équivalent est toujours supérieur à un taux proportionnel donc **TIE > 6%**

4. Combien doit-on placer aujourd'hui pour disposer d'une somme de 2600 € dans 5 ans sachant que le taux de placement est 4.5 % par an.

○ Correction :

La durée du placement est supérieure à 1 an.

On utilise donc le taux d'intérêt composé.

○ Valeur Future = VF = 2600 €

○ Valeur Actuelle ?

○ Durée n= 5ans

○ Taux d'intérêt annuel = 4.5 %

○ Formule :

Formule : $VA = VF \cdot (1 + i)^{-n}$ ou $VF \cdot 1 / (1 + i)^n$

○ Application Numérique :

$VA = 2600 \cdot (1 + 4,5\%)^{-5}$ ou $VF \cdot 1 / (1 + 4,5\%)^5 = 2086 \text{ €}$

5. Vous souhaitez vous constituer un apport afin de renouveler votre voiture dans 3 ans. Vous pouvez placer 500 € par mois au taux de 3 % annuel. De quel capital disposez vous à la fin des 3 ans ?

○ Correction :

Suite de 36 mensualités ?

Taux mensuel équivalent de 3% annuel : $i' = (1+i)^{1/12} - 1 = (1,03)^{1/12} = 0,2466\%$

Capital Acquis $V_{36} = 500 [(1 + 0,2466\%)^{36} - 1 / 0,2466\%] = 18\,799 \text{ €}$

Serez vous capable d'acheter une voiture qui coûte 20 000 euros ?

Réponse : ?

6. Combien dois-je épargner tous les mois pour pouvoir acheter la voiture de 20 000 euros ?

○ Correction :

VF = 20 000 €

CF mensuel ?

$20\,000 \text{ €} = C [(1 + 0,2466\%)^{36} - 1 / 0,2466\%]$

CF mensuel = $20\,000 \text{ €} / [(1 + 0,2466\%)^{36} - 1 / 0,2466\%]$

CF mensuel = 531,94 €

7. Vous investissez 1000€ dans 1 mois en fin de période, 750 € dans 2 mois et 250 € dans 3 mois. De quel montant disposez vous si le taux d'intérêt mensuel est de 0,5% dans 3 mois ?

○ Correction :

C'est bien une capitalisation.

La durée du placement est inférieure à 1 an.

On utilise donc le taux d'intérêt simple.

○ Valeur Future de flux différents ?

○ Durée n= 3 mois

○ Taux d'intérêt mensuel = 0.5 % soit un taux d'intérêt annuel de 6%

○ Formule : $VF_n = \sum_{L=1}^n C \times (1 + i \times n)$

○ Soit $VF1 = C \times (1 + i \times n) = 1000 \times (1 + 0,5\% \times 2) = 1010$

○ Soit $VF2 = C \times (1 + i \times n) = 750 \times (1 + 0,5\% \times 1) = 753,75$

○ Soit $VF3 = C \times (1 + i \times n) = 250 \times (1 + 0,5\% \times 0) = 250$

○ Soit $\sum VF = 1015 + 757,50 + 251,25 = 2013,75$



Mois	1	2	3		
Flux entrants	1000	750	250		
Flux sortants	0,00%				
				250	250
				1.010,00	$1000 \times (1 + 0,005 \times 2)$
				753,75	$750 \times (1 + 0,005 \times 1)$
				1000	$1000 \times (1 + 0,005 \times 0)$
				Total	2013,75