

INSTRUMENTS DE FINANCEMENT

CHAPITRE 2 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Catherine Destombes
CEO – Founder
Expert Financier – Trésorerie Groupe

2023-2024

PLAN DU COURS INSTRUMENTS DE FINANCEMENTS

- **Chapitre 1 : Introduction – La problématique du financement de l’entreprise**

- **Chapitre 2 : Mathématiques Financières de base**

- **Chapitre 3 : Crédit Court Terme**
 - 3.1 Financements intermédiés
 - 3.2 Les titres de créances négociables

- **Chapitre 4 : Les prêts Long Terme**
 - 4.1 Financements intermédiés
 - 4.2 Les Obligations

- **Chapitre 5 : Les Fonds propres**

LES OBJECTIFS DU CHAPITRE 2

- Maîtriser l'impact du « temps » sur les opérations financières pour être en capacité de prendre des décisions financières en appréciant leur rentabilité et les risques associés
- Pouvoir calculer un taux d'intérêt simple et un taux d'intérêt composé
- Comprendre et distinguer la logique des opérations d'actualisation et de capitalisation
- Faire la différence entre le taux actuariel d'un emprunt ou d'un placement et le Taux Effectif Global (TEG) et savoir calculer les taux équivalents (passage de l'un à l'autre et de déterminer le coût exact d'un financement ou la valeur d'un actif financier)

MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

- **La culture financière des Français !**

R. Bigot - P. Crouette - J. Müller N° R277 - *Novembre 2011 source Crédoc (Centre de Recherche pour l'étude et l'observation des conditions de vie)*

- Résumé : « La culture financière des Français laisse à désirer. Nos concitoyens peinent à maîtriser des concepts pourtant élémentaires en la matière. Ils ont également des difficultés à faire des calculs financiers simples »

A la question, si on place 100 € à 2% par an pendant un an, vous obtenez :

- 100 €
- 102 €
- Moins de 100 €

- **Seule une personne sur deux donne une réponse juste !!!**
- Une personne sur quatre parvient à trouver, dans une liste de trois réponses possibles, la définition d'une obligation, seulement 45% savent ce qu'est un fonds commun de placement et 52% connaissent les principes d'un dividende.

1. Les principes de base du Trésorier

2. Le Taux d'Intérêt

2.1 Le taux d'intérêt simple

2.2 Le taux d'intérêt Composé

2.3. Le Taux d'intérêt précompté et postcompté et Taux d'intérêt équivalent

2.4 Le taux d'intérêt réel et taux d'intérêt nominal

3. Time Value of Money

3.1 La détermination des Flux

3.2 La Capitalisation

3.3 L'Actualisation

3.4 La Valeur Actuelle

3.5 La Valeur Actuelle Nette (VAN)

4. Exercices

1. LES PRINCIPES DE BASE DU FINANCIER/TRÉSORIER

- **L'assimilation du langage du Financier/Trésorier permet d'échanger avec ses partenaires bancaires afin de :**
 - Traduire dans la gestion de son entreprise les principes appliqués par les banques
 - Vérifier les opérations et conditions bancaires dans les comptes de l'entreprise... conditions bancaires contractualisées
 - Partager une vision commune d'un financement et des frais financiers correspondants et donc de négocier
 - _Décider et arbitrer entre des projets, des solutions de financement, ...
 - ... Mais également de gérer son budget personnel, ses revenus, ses dépenses

1. LES PRINCIPES DE BASE DU FINANCIER/TRÉSORIER

- **Référence de base : le nombre de jours dans une année**
 - **360 jours (année lombarde) (12 x 30 jours)**
 - Supports du marché monétaire (pensions, ...)
 - Titres de Créances Négociables (TCN) émises à moins d'un an, Bons du trésor, ~~certificats de dépôts, Billets de trésorerie~~ **remplacés par les NEU CP**, Bons de sociétés financières (sauf billet à ordre négociable)
 - **365 jours et 366 jours pour les années bissextiles**
 - Produits obligataires quelle que soit leur maturité
 - Les Titres de Créances Négociables émises à plus d'un an

Hormis ces cas de figure classiques, en cas de doute

On pose la question au Banquier, on demande un draft de contrat, on vérifie le calcul de référence (réglementaire) des frais financiers, ...

1. LES PRINCIPES DE BASE DU FINANCIER/TRÉSORIER

■ Cas pratique :

J'emprunte 1000 euros à 10% pendant 91 jours base 365.

Quel est le montant des intérêts simples versés base 365 et base 360 ?

montant emprunté	1000		
Taux d'intérêt simple	10%		
Durée en jours	91		
Intérêts base 365	$1000 \times 10\% \times 91 / 365 =$	24,93	
Intérêts base 360	$1000 \times 10\% \times 91 / 360 =$	25,28	
Impact	$(365/360) - 1 =$	1,39%	

➤ Intérêts base 360 toujours supérieurs aux intérêts base 365

1. LES PRINCIPES DE BASE DU FINANCIER/TRÉSORIER



▪ Les taux d'intérêt permettent de :

- Calculer le coût d'un financement et les frais financiers correspondants
- Pouvoir comparer des valeurs à des périodes temporelles différentes



Plusieurs définitions du taux d'intérêt pour des utilisations différentes :

- Intérêts simples / intérêts composés et taux équivalents
- Intérêts précomptés / intérêts postcomptés et taux équivalent
- Taux d'intérêt réel / taux d'intérêt nominal

2.1 LE TAUX D'INTÉRÊT SIMPLE

Principes	Les intérêts simples ne sont pas générateurs eux-mêmes d'intérêts. Seul le capital investi porte intérêt.
Utilisation	Durée de l'opération est inférieure à un an Proportionnel à la durée totale du prêt ou du placement Versés en une seule fois, au début ou fin de période S'assurer que le taux d'intérêt et le nombre de périodes sont exprimés dans la même unité de temps.
Formules à retenir	C = montant du Capital investi (emprunté ou placé) : i (annual interest rate) = taux d'intérêt annuel pour une période n = nombre de périodes base 360 jours ou 12 x 30 jours I_n = Montant des intérêts simples VF_n : Valeur Future $I_n = C \times i \times n$ $VF_n = C + I_n = C * (1 + i \times n)$

2.1 LE TAUX D'INTÉRÊT SIMPLE



Application numérique	Placement de 10 000 € pendant 6 mois au taux d'intérêt mensuel de 2 %. Quelle est la Valeur Future de ce placement ?
1. Poser l'énoncé	Capital Investi $C = 10\,000\text{ €}$ Taux d'intérêt mensuel $i = 2\%$ Durée du Placement : nombre de périodes $n = 6$ $VF_n =$ Valeur Future ?
2. Résoudre l'équation	Montant des intérêts simples $= I_6$ $I = C \times i \times n = 10\,000\text{€} \times 2\% \times 6 = 1\,200$ Valeur Future : $VF_n = C + C \times i \times n = C \times (1 + i \times n) =$ $VF = 10\,000\text{ €} + (10\,000\text{ €} \times 2\% \times 6) = \mathbf{11\,200\text{ €}}$

2.1 LE TAUX D'INTÉRÊT SIMPLE

Principes d'applications	
Opérations court terme (marché monétaire, affacturage, ...)	Taux annuel calculé sur 360 jours et non 365 soit une majoration du taux d'intérêt de 365/360 Exemple un taux annuel de 5% coûte en réalité $5\% \times 365/360 = 5,069\%$
Application pratique	Emprunt de 100 000 € à la banque du 15/07/15 au 30/09/2015 Taux d'intérêt annuel $i = 5\%$ Nombre de jours de l'emprunt = 16+31+30 = 77 Jours Intérêt dû = $100\,000\text{€} \times 5\% \times 77/360 = 1\,069,44\text{€}$ soit un taux annuel qui passe de 5% à 5,069%

2.1 LE TAUX D'INTÉRÊT SIMPLE

Principes	
Le taux proportionnel	Sur la base d'intérêts simples (<1 an) , le taux proportionnel permet de passer d'un taux annuel à un taux mensuel ou trimestriel, ...
Formule	On calcule le taux mensuel proportionnel au taux annuel
Formule	<p>Taux annuel = i_{annuel}</p> <p>Taux mensuel = $i_{\text{mensuel}} = i_{\text{annuel}} / \text{nb de période dans l'année (12)}$</p> <p>Taux trimestriel = $i_{\text{trimestriel}} = i_{\text{annuel}} / \text{nb de période dans l'année (4)}$</p>
Application	<p>Taux annuel $i = 6 \%$</p> <p>Taux mensuel = $i_{\text{mensuel}} = 6 \% \times 1 / 12 = 0,005$ ou 0,5%</p> <p>Taux trimestriel = $i_{\text{trimestriel}} = 6 \% / 4 = 1,5 \%$</p> <p style="text-align: center;">***</p> <p>Quel est le montant des intérêts payés si j'emprunte 1000€ pendant 3 mois au taux annuel de 4% (annuel)</p> <p>Montant de l'emprunt : $C = 1\ 000\text{€}$</p> <p>$i = 4 \%$ (annuel)</p> <p>$i_{\text{trimestriel}} = 4 \% / 4$</p> <p>Montant des intérêts trois mois = $I = 1\ 000 \times 4\%/4 = 10 \text{ €}$</p>

2.1 LE TAUX D'INTÉRÊT SIMPLE

- **Intérêts simples et taux proportionnel**

En général, si le taux d'intérêt simple de référence fixé est de $x\%$ par an , composé de n périodes de temps par an, alors le taux réel effectif du taux d'intérêt est de:

$$i \text{ proportionnel} = \frac{i \text{ annuel}}{n}$$

- **Cas pratique d'application :**

Pour un taux annuel de 12%, le taux proportionnel mensuel est de 1%, le taux proportionnel semestriel de 6%.

2.2 LE TAUX D'INTÉRÊT COMPOSÉ

▪ Hypothèses structurantes :

- Le taux d'intérêt reste constant sur la période de l'opération d'emprunt ou de placement : l'hypothèse retenue est de pouvoir replacer les intérêts perçus sur la période de l'opération au taux initial
- Le taux d'intérêt est le même quelque soit l'échéance de l'opération : un montant placé sur 5 ans est placé au même taux annuel qu'une somme placée pour un an.
- La structure des taux est « flat » : les taux sont les mêmes quelque soit l'horizon de temps.

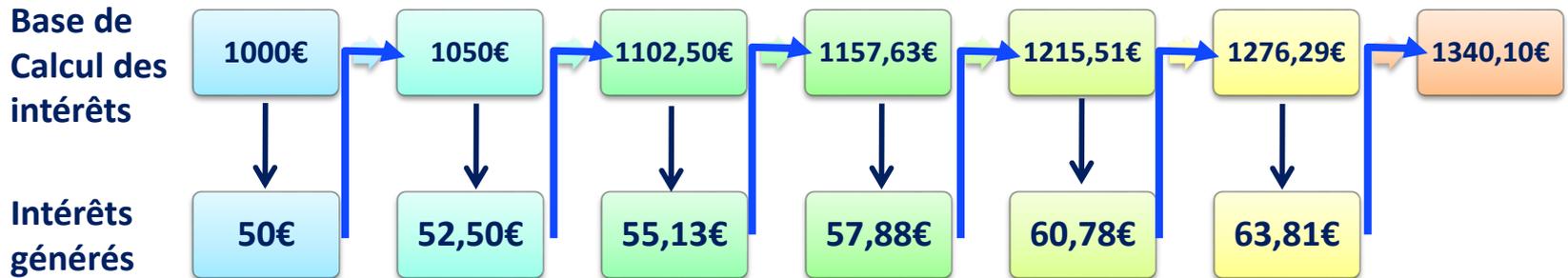
2.2 LE TAUX D'INTÉRÊT COMPOSÉ

Définition	Les intérêts composés sont générateurs de taux d'intérêts qui s'ajoutent au capital en fin de période et produisent eux-mêmes des intérêts. L'intérêt est capitalisé, il est ajouté au capital et il produit des intérêts.
Utilisation	Durée de l'opération est supérieure à un an et calculé à terme échu L'intérêt perçu par le créancier peut être placé pendant la durée restante de l'opération et porte ainsi lui-même intérêts
Formule	C = montant du Capital (emprunté ou placé) : i (annual interest rate) = taux d'intérêt annuel pour une période n = nombre de périodes Valeur Future : $VF_n = C * (1 + i)^n$

2.2 LE TAUX D'INTÉRÊT COMPOSÉ

- Représentation graphique des intérêts composés :

Vous placez 1000€ à 5% annuel sur 6 ans.



- Vérification :

- C = 1000
- i = 5%
- n = 6

Valeur Future : $VF_n = 1000 \text{ €} \times (1 + 5\%)^6 = 1\,340,10\text{€}$

La somme des intérêts $I = VF_n - C = 1\,340,10\text{€} - 1000\text{€} = 340,10\text{€}$

2.2 LE TAUX D'INTÉRÊT COMPOSÉ



Principes	Respect de deux règles pour application de la formule
1 ^{ère} règle	Les paramètres doivent être exprimés dans la même unité. Exemple si le taux d'intérêt est mensuel, le nombre de périodes doit représenter un nombre de mois.
2 ^{ème} règle	L'application d'intérêts composés à un calcul se fait sur le nombre de jours exact de l'année soit 365 jours Le 1er trimestre = 31 + 28 + 31 = 90 Jours (91j si année bissextile)



Valeur Future avec intérêts composés toujours supérieure à la Valeur Future calculée avec intérêts simples (si $n > 1$)

2.2 LE TAUX D'INTÉRÊT COMPOSÉ

Principes	
Le taux équivalent	Sur la base d'intérêts composés (>1 an) , le taux équivalent permet de calculer un taux mensuel ou trimestriel, ... à partir d'un taux d'intérêt annuel surtout si les remboursements se font par mensualités ou trimestrialités... ou inversement un taux d'intérêt annuel à partir d'un taux mensuel ou trimestriel, ...
Formule	Deux taux sont équivalents s'ils conduisent à la même Valeur acquise pour un taux de placement identique.
Formule	<p>Taux annuel = i_{annuel} Taux Périodique = i_k $(1 + i_{\text{annuel}}) = (1 + i_k)^k$ $i_{\text{annuel}} = (1 + i_k)^k - 1$ $i_k = (1 + i_{\text{annuel}})^{1/k} - 1$</p>
Application	<p>Quel est le taux annuel équivalent à un taux mensuel de 0,6% et le taux trimestriel équivalent à un taux annuel de 5.5% ?</p> $i_{\text{annuel}} = (1 + i_k)^k - 1 = (1 + 0,6\%)^{12} - 1 \sim 7,44\%$ $i_t = (1 + i_{\text{annuel}})^{1/t} - 1 = (1 + 5,5\%)^{1/4} - 1 \sim 1,35\%$

2.2 LE TAUX D'INTÉRÊT COMPOSÉ

▪ Fréquence de Capitalisation et coût

Cas pratique : Votre banque met à votre disposition une carte de crédit qui fixe un taux d'intérêt annuel de 20%. Quel est le taux réel qui vous sera appliqué si vous ne payez pas à temps ?

Nombre de période n	Fréquence de capitalisation	Taux Effectif annuel
1	Annuelle	20%
2	Semestrielle	$(1+20\%/2)^2-1 = 21\%$
4	Trimestrielle	$(1+20\%/4)^4-1 = 21.55\%$
12	Mensuelle	$(1+20\%/12)^{12}-1 = 21.94\%$
52	Hebdomadaire	$(1+20\%/52)^{52}-1 = 22.09\%$
365	Journalière	$(1+20\%/365)^{365}-1 = 22.13\%$
∞	Continue	$e^{(20\%)}-1 = 22.14\%$

2.2 LE TAUX D'INTÉRÊT COMPOSÉ

- **Taux annuel vs taux exprimé en n périodes**

En général, si le taux d'intérêt composé de référence fixé est de x% par an , composé de n périodes de temps par an, alors le taux réel effectif du taux d'intérêt est de :

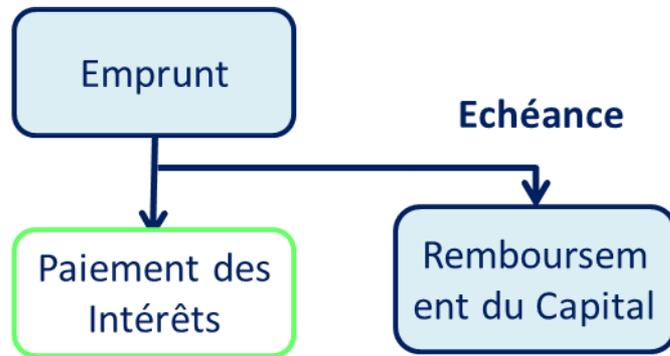
$$t_{\text{effectif}} = \left(1 + \frac{t_{\text{référence}}}{n} \right)^n - 1$$



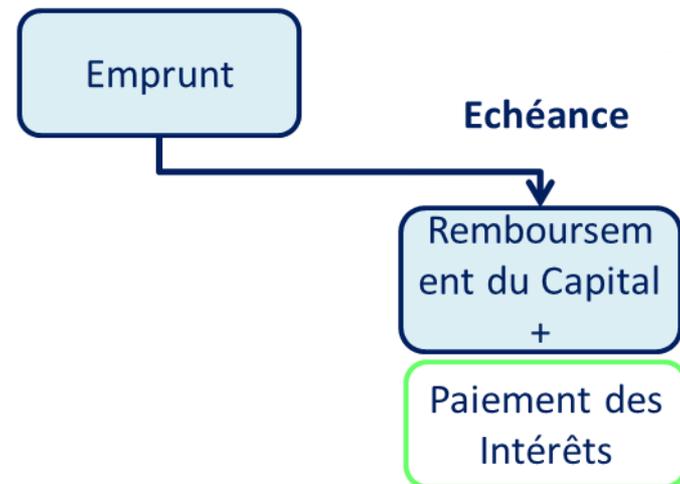
Le taux d'intérêt effectif comparé au taux d'intérêt de référence annuel croit avec le nombre de périodes de capitalisation des intérêts.

2.3 LE TAUX D'INTÉRÊT PRÉCOMPTÉ ET POSTCOMPTÉ

Principes	
Terme échu ou postcompté	Intérêts dus en fin de période (à l'avantage de l'emprunteur)
Terme à échoir ou précompté	Intérêts dus en début de période (à l'avantage du prêteur) Le capital mis à disposition de l'emprunteur est minorée du montant des intérêts dus et versés lors de la mise en place de l'emprunt



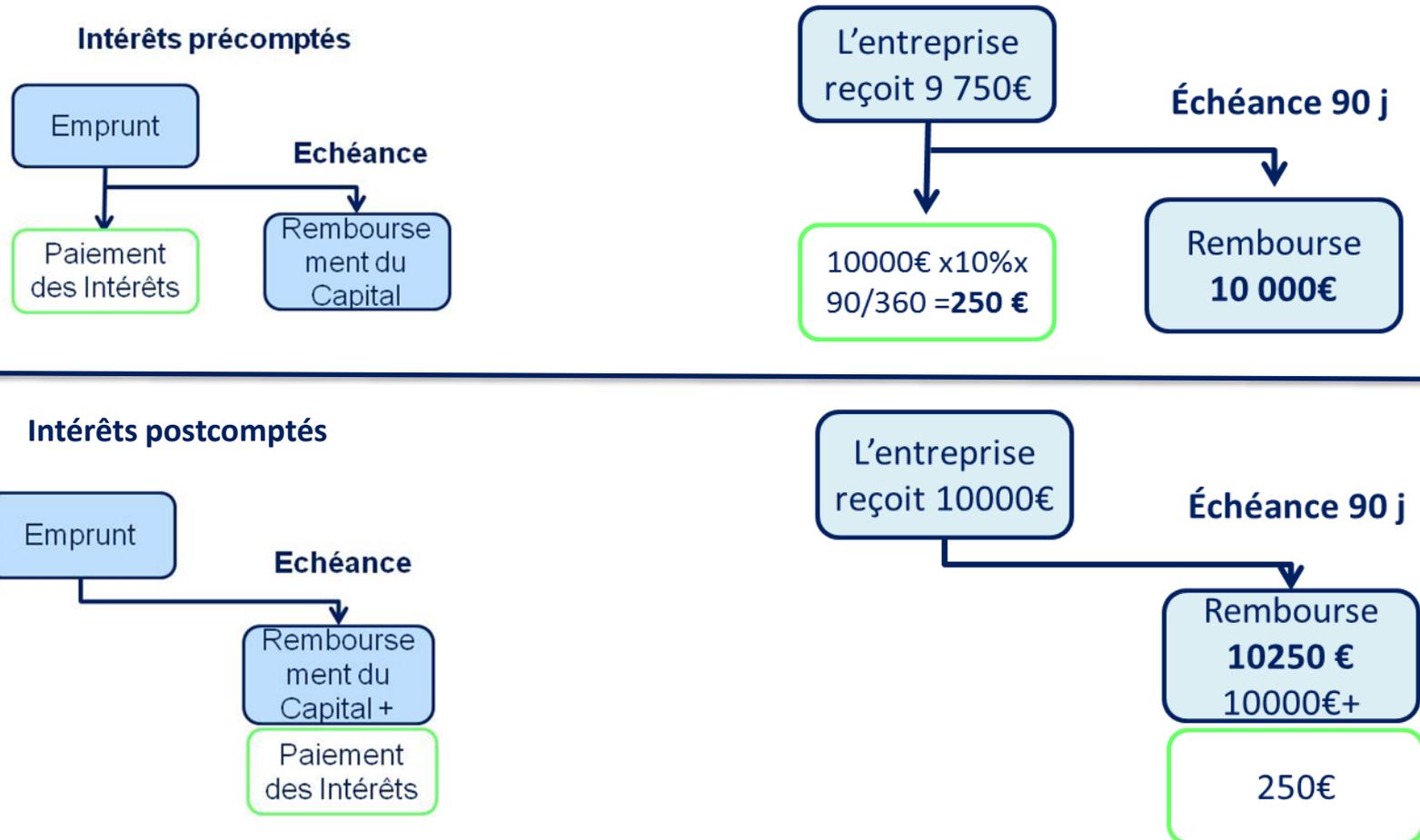
Terme à échoir ou précompté



Terme échu ou postcompté

2.3 LE TAUX D'INTÉRÊT PRÉCOMPTÉ ET POSTCOMPTÉ

- Une entreprise emprunte 10 000€ pour une durée de 90 jours au taux annuel de 10%. Le taux d'intérêt retenu est le taux d'intérêt simple (<1an).



2.3 LE TAUX D'INTÉRÊT PRÉCOMPTÉ ET POSTCOMPTÉ

▪ Le taux d'Intérêt équivalent (TIE)

La somme versée à l'emprunteur diffère selon le mode de calcul précompté ou postcompté. Aussi, il est nécessaire de calculer un Taux d'intérêt Equivalent (TIE) correspondant au taux calculé sur la somme réellement empruntée.

Le taux d'intérêt post compté équivalent aux taux d'intérêt précompté est obtenu par le Taux d'Intérêt Equivalent (TIE).

- Lorsque les intérêts sont précomptés, la somme réellement empruntée est de $C - I$, avec $I = C \times i \times n$.

Si TIE est le taux appliqué à la somme réellement reçue :

$$I = (C - I) \times \text{TIE} \times n \Leftrightarrow \text{TIE} = \frac{I}{(C - I)} \times \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \text{TIE} = \frac{C \times i \times n}{C(1 - i \times n)} \times \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \text{TIE} = \frac{i}{(1 - i \times n)}$$

2.3 LE TAUX D'INTÉRÊT ÉQUIVALENT

■ Cas Application pratique TIE:

Une entreprise place 50 000€ au taux d'intérêt précompté de 5,6% par an pendant 5 mois.

Quel est le taux postcompté équivalent à ce taux précompté de 5,6%.

Avant de faire le calcul, le taux postcompté équivalent au taux précompté sera-t-il supérieur ou inférieur au taux précompté ?

le taux postcompté sera supérieur au taux précompté pour qu'il y ait équivalence de taux d'intérêt.

$$\text{TIE} = \frac{i_{\text{pré}}}{(1 - i_{\text{pré}} \times n)} = \frac{5,60\%}{1 - 5,6\% \times 5/12} = 5,73\%$$

2.4 TAUX D'INTÉRÊT RÉEL ET TAUX D'INTÉRÊT NOMINAL

- **Le Taux d'intérêt nominal est le taux qui apparait sur le contrat, correspondant au rendement de l'argent.**
- **Le Taux d'intérêt nominal peut être :**
 - Fixe : pas d'évolution sur la durée du contrat
 - Variable : évolution retenue sur la base d'une variable prise comme référence comme l'inflation ou le taux d'intérêts interbancaires CT (Euribor)

L'inflation profite souvent à l'emprunteur et pénalise le prêteur.

- **Le taux d'intérêt réel est le taux d'intérêt nominal corrigé de l'inflation exprimé en euros constants.**

$$1 + \text{taux réel} = \frac{1 + \text{taux nominal}}{1 + \text{taux d'inflation}}$$

$$\text{taux réel} = \frac{\text{taux nominal} - \text{taux d'inflation}}{1 + \text{taux d'inflation}}$$

Si taux inflation faible

$$\text{taux réel} \sim \text{taux nominal} - \text{taux d'inflation}$$

2.4 TAUX D'INTÉRÊT RÉEL ET TAUX D'INTÉRÊT NOMINAL



▪ Cas pratique d'application :

Calculer le coût réel d'un emprunt à 10 % annuel, lorsque l'inflation est à 8% et lorsque le taux d'inflation est à 2% ?

$$\text{taux réel} = \frac{\text{taux nominal} - \text{taux d'inflation}}{1 + \text{taux d'inflation}}$$

$$\text{▪ Cas 1 : Taux réel} = \frac{(10\% - 8\%)}{1 + 8\%} = 1,85\%$$

$$\text{▪ Cas 2 : Taux réel} = \frac{(10\% - 2\%)}{1 + 2\%} = 7,84\%$$

1. Les principes de base du Trésorier

2. Le Taux d'Intérêt

2.1 Le taux d'intérêt simple

2.2 Le taux d'intérêt Composé

2.3. Le Taux d'intérêt précompté et postcompté et Taux d'intérêt équivalent

2.4 Le taux d'intérêt réel et taux d'intérêt nominal

3. Time Value of Money

3.1 La détermination des Flux

3.2 La Capitalisation

3.3 L'Actualisation

3.4 La Valeur Actuelle

3.5 La Valeur Actuelle Nette (VAN)

4. Exercices

3 TIME VALUE OF MONEY – VALEUR TEMPS DE L'ARGENT

Rappel

- **Le taux d'intérêt rémunère et couvre :**
 - Le temps : « Loyer de l'argent qui sera rendu dans des conditions contractuelles définies (montant-taux-durée)
 - L'inflation : le prêteur voudra se couvrir contre l'inflation (ex taux réel fonction de l'inflation) d'autant plus que la durée est longue donc plus incertaine
 - Le risque

- **Principe de base : un Euro 2020 \neq un Euro 2021... \neq Un Euro 200n**

3.1 DÉTERMINATION DES FLUX – OU CASH FLOW

▪ La séquence de flux

- Un emprunt se caractérise par une ou plusieurs entrées de fonds correspondant au capital emprunté puis par des sorties de fonds correspondant aux paiements des intérêts et au remboursement du capital.
- Chaque flux monétaire est nommé Cash Flow.
- En considérant une seule entrée de fonds, la séquence de flux se note $(CF_0; CF_1; \dots; CF_n)$, avec $CF_0 > 0$ et $CF_i < 0$ pour i allant de 1 à n .

3.2 LA CAPITALISATION D'UN FLUX UNIQUE

La Capitalisation représente la Valeur Future d'un Capital investi.

Résumé de l'utilisation des taux d'intérêt pour calculer la Capitalisation d'un flux nominal unique

	Intérêt Simple	Intérêt Composé
Application	Emprunt/Placement < 1 an	Emprunt/Placement > 1 an
Principe	Seul le Capital génère des intérêts	Les intérêts sont réinvestis et génèrent aussi des intérêts
Base de calcul	360 jours par an	365 jours par an
Modification de la fréquence temporelle	Par le taux proportionnel	Par le taux équivalent
Formule Générale de la Valeur Future VF_n	$VF_n = C \times (1 + i \times n)$ (n=nb de périodes)	$VF_n = C \times (1 + i)^n$ (n= nombre d'années)

3.2 LA CAPITALISATION



- **Calculer la Valeur Future d'un Placement de 1000 € à 10% au bout de 10 périodes.**



1. Avec la méthode des intérêts simples

$n = 10$ périodes soit < 1 an

Formule : $VF_n = C \times (1 + i \times n)$

$$VF_n = 1000 \times (1 + 10\% \times 10 \text{ mois} / 12 \text{ mois}) = 1\,083,33 \text{ €}$$

2. Avec la méthode des intérêts composés

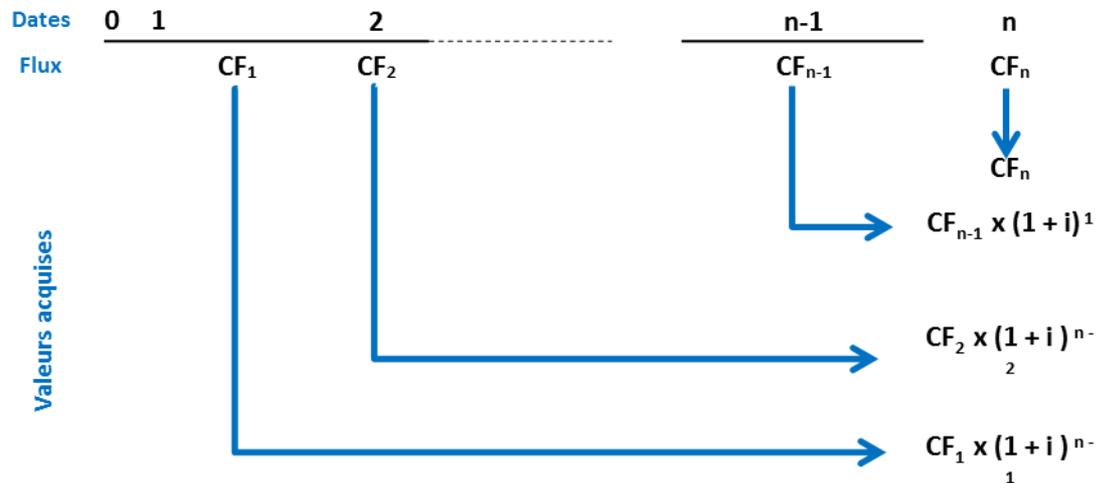
$n = 10$ périodes soit > 1 an

Formule : $VF_n = C \times (1 + i)^n$

$$VF_n = 1000 \times (1 + 10\%)^{10} = 2\,593,74 \text{ €}$$

3.2 LA CAPITALISATION D'UNE SUITE DE FLUX DE FIN DE PÉRIODE

- Afin de constituer un Capital, l'investisseur peut décider de constituer à intervalles réguliers des versements identiques ou non sur une périodicité annuelle, semestrielle, trimestrielle, mensuelle,... On parle alors d'annuités, semestrialités, trimestrialités, mensualités...



$$VF_n = \sum_{p=1}^n CF (1+i)^{n-p}$$

$$VF_n = CF_1 \times (1+i)^{n-1} + CF_2 \times (1+i)^{n-2} + \dots + CF_{n-1} \times (1+i) + CF_n$$

3.2 LA CAPITALISATION D'UNE SUITE DE FLUX DE FIN DE PÉRIODE

- Application pratique

Placement sur 6 ans en fin de période au taux de 2,15%

$$VF_n = \sum_{p=1}^n CF (1+i)^{n-p}$$

Année	0	1	2	3	4	5	6		
Placement		100	200	250	150	0	400		
Taux annuel 2,15%									
							400	Pas de Capi.	
						1an	$0x (1 + 2,15\%)^1$		
					2ans		$150x (1 + 2,15\%)^2$		
				3ans			$250x (1 + 2,15\%)^3$		
			4ans				$200x (1 + 2,15\%)^4$		
		5ans					$100x (1 + 2,15\%)^5$		

3.3 LA CAPITALISATION



- Quelle est la valeur future, d'une suite de versements constant de fin de période d'un même montant CF, pendant n périodes. Le premier flux est placé pendant n-1 périodes, le second pendant n-2 périodes?

Généralisation: Valeur Future (Valeur acquise en fin de période) =

$$CF_1 \times (1+i\%)^{n-1} + CF_2 \times (1+i\%)^{n-2} + \dots + CF \times (1+i) + CF$$

Ou

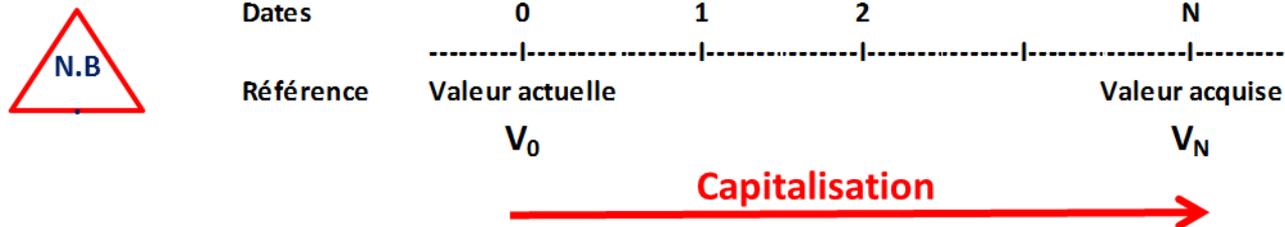
$$\text{Valeur Future} = CF \times \sum (1+i\%)^p$$

$\sum_{p=0}^{n-1} (1+i\%)^p$ représente la somme d'une suite géométrique de n termes avec un premier terme 1 et de raison (1+i)

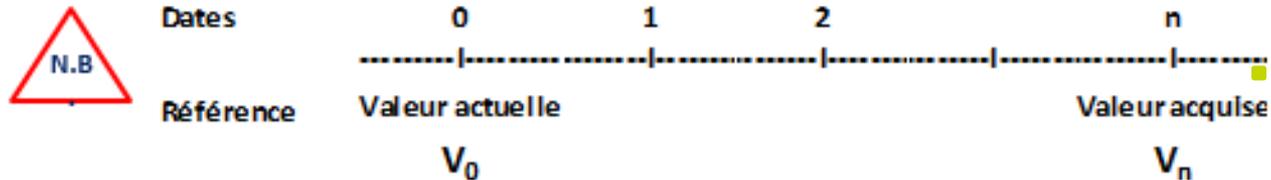
$$VF_{\text{(fin de période)}} = CF \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

3.3 L'ACTUALISATION / CAPITALISATION

- La Capitalisation permet de déterminer la Valeur Future d'un Cash Flow ou d'une séquence de Flux.
- L'actualisation permet de connaître la Valeur actuelle d'une somme de Cash Flow.
- Ce calcul permet de répondre à la question :
 - Quelle somme doit être placée aujourd'hui pour disposer d'une somme de Cash Flow définie dans le Futur ?



3.3 VALEUR ACTUELLE – VALEUR ACQUISE



- **Valeur actuelle:**

La somme C_0 qu'il faut placer pendant n périodes au taux d'intérêt i pour obtenir le Capital C_n soit

$$C_0 = C_n (1 + i)^{-n} \quad \text{ou} \quad C_0 = C_n / (1 + i)$$

- **Valeur acquise ou Valeur future:**

C_n est appelé valeur acquise pour un capital C_0 placer pendant n périodes au taux d'intérêt i soit :

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

3.3 L'ACTUALISATION D'UN FLUX UNIQUE

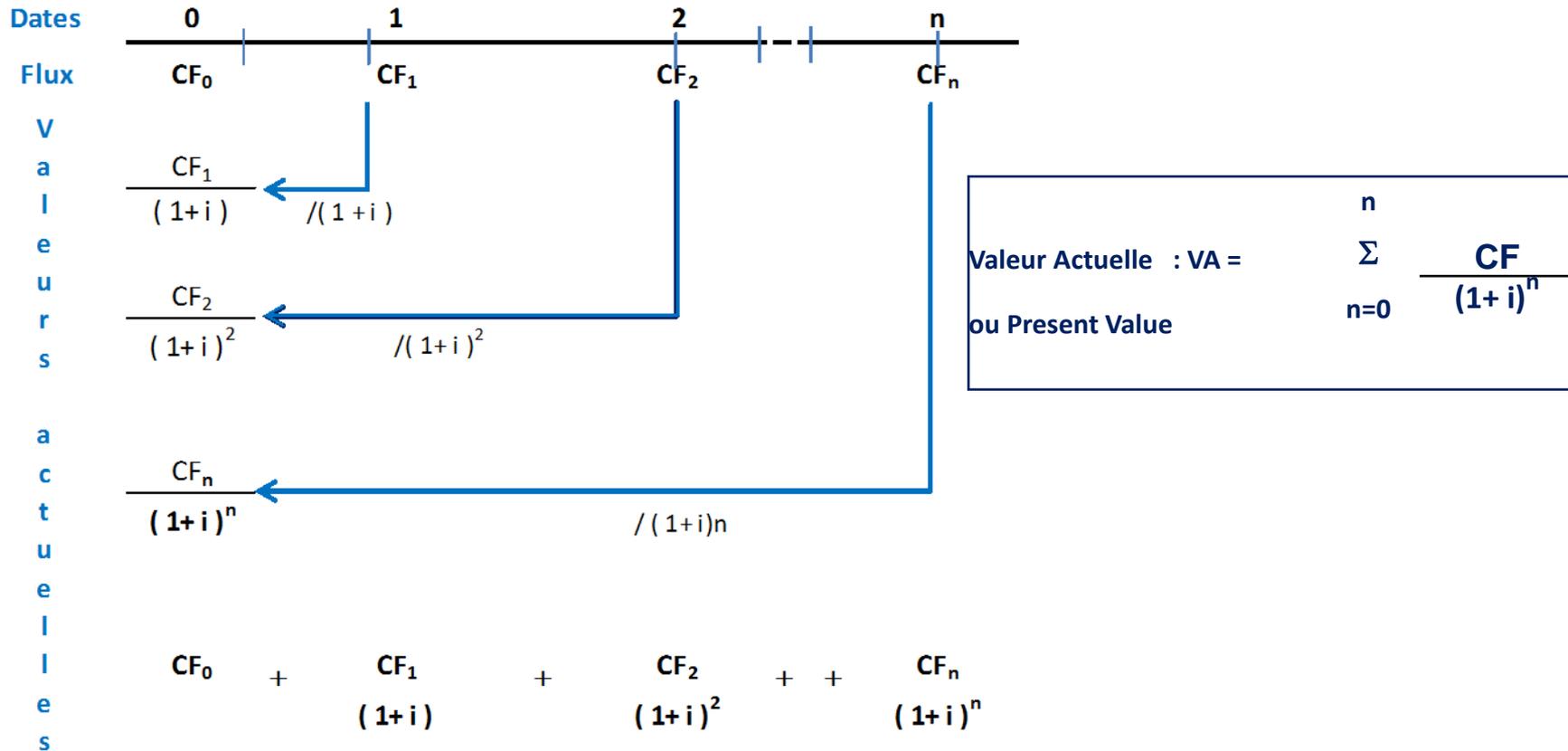
- L'actualisation permet de connaître la Valeur actuelle d'une somme de Cash Flow.

Résumé de l'utilisation des taux d'intérêt pour calculer l'Actualisation d'un flux unique

	Intérêt Simple	Intérêt Composé
Application	Emprunt/Placement < 1 an	Emprunt/Placement > 1 an
Principe	Seul le Capital génère des intérêts	Les intérêts sont réinvestis et génèrent aussi des intérêts
Base de calcul	360 jours par an	365 jours par an
Modification de la fréquence temporelle	Par le taux proportionnel	Par le taux équivalent
Formule Générale de la Valeur Actuelle VA_n	$VA_n = \frac{CF_n}{(1 + i \times n)}$ <p>(n=nb de périodes)</p>	$VA_n = \frac{CF_n}{(1 + i)^n} \text{ ou } CF \times (1 + i)^{-n}$ <p>(n= nombre d'années)</p>

3.3 L'ACTUALISATION D'UN FLUX UNIQUE

- L'actualisation permet de connaître la Valeur actuelle d'une somme de Cash Flow versement en fin de période



3.3 L'ACTUALISATION



- **Quelle est la valeur actuelle, en t_0 de flux de trésorerie futurs ?**

Hypothèse sous-jacente: un capital disponible en t_0 est placé un taux d'intérêt i %

Cas pratique d'application :

Recevoir 10 500 € dans 1 an sachant que le taux d'intérêt (ou taux d'actualisation) est 5% est identique à recevoir aujourd'hui:

$$10\,500 / (1 + 5\%)^1 = 10\,000$$

Généralisation: Valeur actuelle (VA) = $CF_1 / (1 + i\%)^1 + CF_2 / (1 + i\%)^2 + \dots + CF_n / (1 + i\%)^n$

Ou

$$\text{Valeur Actuelle} = CF \times \sum (1 + i\%)^{-n}$$

$\sum_1^n (1 + i\%)^{-n}$ représente la somme d'une suite géométrique de n termes avec un premier terme de $(1 + i)^{-1} = 1 / (1 + i)$ et de raison $(1 + i)^{-1} = 1 / (1 + i)$

$$\text{Soit } \sum_1^n (1 + i\%)^{-n} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$\text{VA} = CF \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

3.3 L'ACTUALISATION



- Vous souhaitez acquérir un bien immobilier et contracter un emprunt remboursables par mensualités constantes sur 20 ans. Sachant que votre capacité de remboursement mensuel est de 1 300 €, et que le banquier vous propose un taux d'intérêt annuel de 3%
Combien pouvez-vous emprunter ?

Réponse:

1. Détermination du taux mensuel équivalent

on sait que	$(1 + ia) = (1 + im)^{12}$	
	$im = (1 + ia)^{1/12} - 1$	
	$im = (1 + 3\%)^{1/12} - 1$	
	$im =$	0,25%

2. Détermination de la capacité d'emprunt

$$VA = \frac{CF \times (1 - (1+i)^{-n})}{i}$$

$$VA = 1300 \times \frac{1 - (1 + 0,25\%)^{-240}}{0,25\%}$$

$$VA = 1300 / (1 + 0,25\%) + 1300 / (1 + 0,25\%)^2 + \dots + 1300 / (1 + 0,25\%)^{240}$$

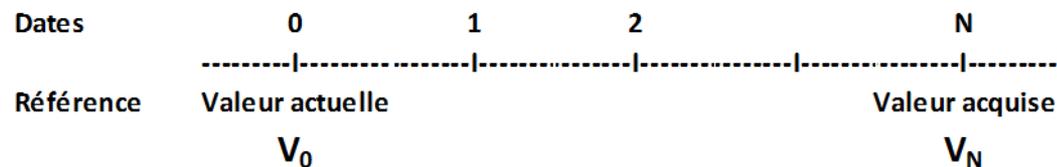
= 234 404 €

3.3 LES RENTES PERPÉTUELLES / LES ANNUITÉS

- Les rentes perpétuelles sont des emprunts (d'Etats) pour lesquels l'émetteur n'est tenu de rembourser (uniquement) que le montant des intérêts.
- Une annuité est une suite de règlements effectués à intervalles égaux.
- Par définition, une annuité correspond – étymologiquement – à une périodicité annuelle, ..., une mensualité à une période mensuelle.
- Les montants correspondant sont des flux de trésorerie positifs ou négatifs ou Cash Flow.
- Une suite d'annuités représente une rente temporaire lorsque le nombre d'annuités est fini (connu), perpétuelle lorsque le nombre de termes est infini.

3.3 LES RENTES PERPÉTUELLES / LES ANNUITÉS

- Les caractéristiques :
- Pour calculer une rente, il est indispensable de connaître les éléments suivants :
 - La valeur de chaque flux (Cash Flow) ou sa référence (EBITDA, multiple de l'EBITDA, ...)
 - Le nombre de flux de trésorerie
 - La périodicité des versements
 - Le nombre de périodes entre l'origine et le premier versement



3.4 LA VALEUR ACTUELLE NETTE –VAN OU TAUX ACTUARIEL

- **Son Utilisation** : Valorisation de projet, Calcul de rentabilité d'un investissement
On parlera de Valeur Actuelle Nette ou (Net Present Value – NPV) lorsque l'origine de la suite est un nombre < 0
- Cela consiste à actualiser les cash flows prévisionnels d'un projet d'investissement, c'est à dire à ramener leur valeur à l'époque zéro et à en faire la somme. L'investissement dont la valeur actuelle nette sera la plus élevée sera considéré comme le plus rentable.
- Au préalable, devra être défini le taux d'actualisation ou taux actuariel.

$$VAN = -I + \sum_{p=1}^n CF \times (1 + i)^{-p}$$

Avec I : montant de l'Investissement
i = taux de rentabilité exigé
CF = Cash Flow prévisionnel

3.4 LA VALEUR ACTUELLE NETTE –VAN OU TAUX ACTUARIEL



- J'achète un bien immobilier de 1 000 € pour des Cash Flow estimés annuels (dans tableau ci-dessous)
Le Taux actuariel correspondant au taux de rentabilité exigé par l'actionnaire est de 8%.
- Rappel de la Formule : $VA (CF_i) = \sum_{i=1}^n CF_i \times (1 + 8\%)^{-i}$

	i=1	0	1	2	3	4	5	Σ Cash Flows
Montant de l'Investissement		-1000						-1 000
Cash Flow estimé			200	240	300	340	400	
Cash Flow actualisé	8%		185	206	238	250	272	1 151
Valeur Actuelle Nette - VAN								151

- Pour un taux actuariel de 8%, la VAN est de 151, soit un montant supérieur à 0.
- Ce qui veut dire qu'avec ce taux de rentabilité, l'investissement crée de la valeur (151).
- En revanche si le taux était de 15 %, l'investissement serait il rentable ?

3.4 LA VALEUR ACTUELLE NETTE –VAN OU TAUX ACTUARIEL

- Le Taux actuariel correspondant au taux de rentabilité exigé par l'actionnaire est de 15%.

- Rappel de la Formule : $VA (CF_i) = \sum_{i=1}^n CF_i \times (1 + 15\%)^{-n}$

		0	1	2	3	4	5	Σ Cash Flows
Montant de l'Investissement		-1000						-1 000
Cash Flow estimé			200	240	300	340	400	
Cash Flow actualisé	15%		174	181	197	194	199	946
Valeur Actuelle Nette - VAN								-54

- Pour un taux actuariel de 15%, la VAN est de - 54, soit un montant inférieur à 0.
- Ce qui veut dire qu'avec ce taux de rentabilité, l'investissement détruit de la valeur.
- Cet investissement avec cette exigence de rentabilité n'est pas rentable.

Conclusion : Plus le taux de rentabilité est faible, plus le projet devient rentable.

- Quel est le taux de rentabilité de cet investissement avec cette chronique de Cash Flow ?

3.4 LE TAUX DE RENTABILITÉ INTERNE - TRI

- Le Taux de Rendement Interne TRI ou Taux de Rendement Actuariel ou IRR (Internal Rate of Interest est le Taux qui annule la VAN

$$VAN = -I + \sum_{p=1}^n CF \times (1+i)^{-p} = 0$$

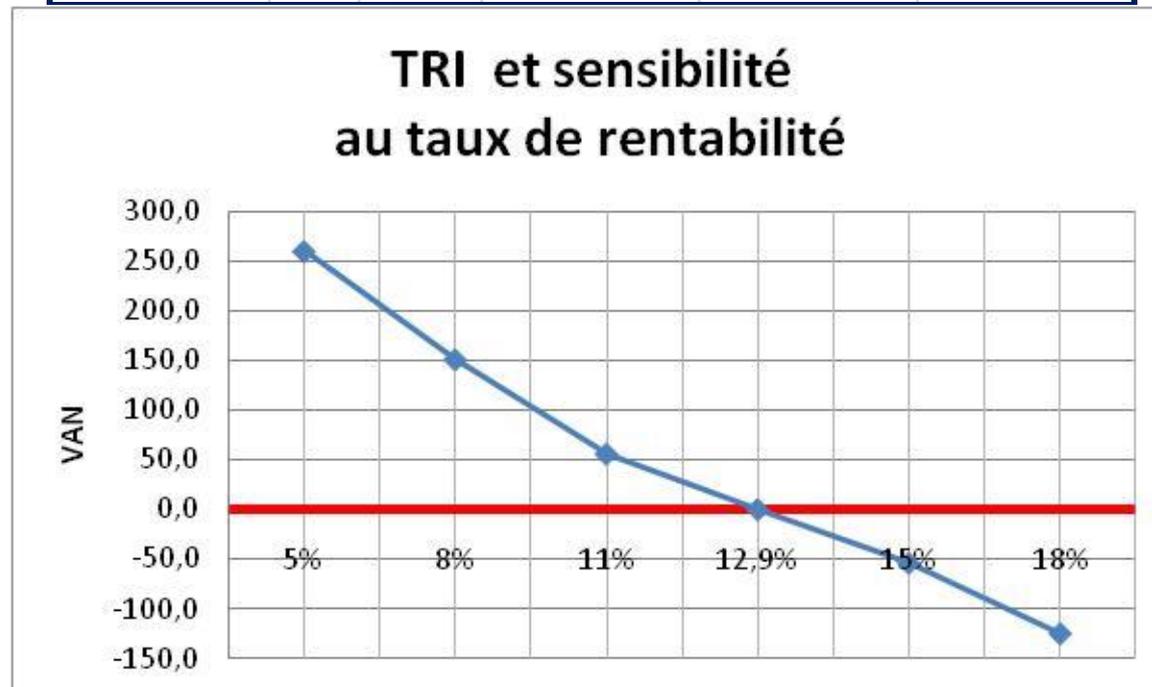
	0	1	2	3	4	5	Σ Cash Flows
Montant de l'Investissement	-1000						-1 000
Cash Flow estimé		200	240	300	340	400	
Cash Flow actualisé 12,9%		177	188	208	209	218	1 000
Valeur Actuelle Nette - VAN							0

$$TRI = i \text{ tel que } VAN(i\%) = 0 \text{ avec } -I_0 + \sum_{i=1}^n CF_i (1+i)^{-i} = 0$$

3.4 LE TAUX DE RENTABILITÉ INTERNE - TRI

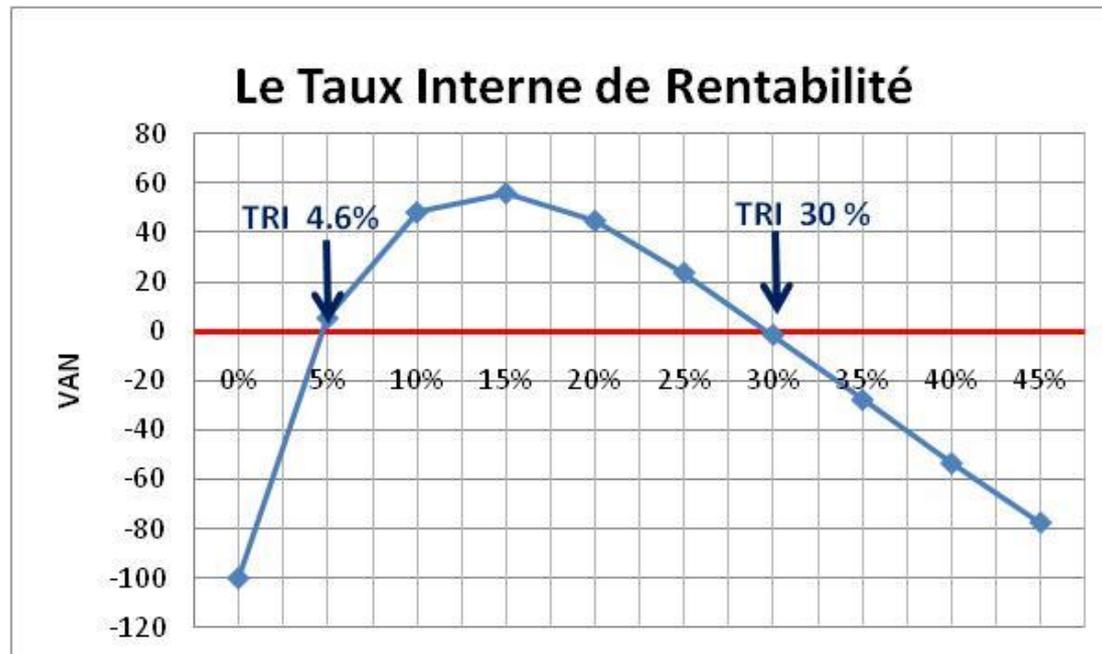
- Le Taux de Rendement Interne TRI ou Taux de Rendement Actuariel ou IRR (Internal Rate of Interest est le Taux qui annule la VAN
- Calcul par Valeur cible, Excel , extrapolation, encadrement taux,...

		n			
VAN	=	-I +	$\sum_{p=1}^n$	CF x (1 + i)^{-p}	= 0
			p=1		



3.4 LE TAUX DE RENTABILITÉ INTERNE - TRI

- Limite du Taux de Rendement Interne TRI ou Taux de Rendement Actuariel ou IRR (Internal Rate of Interest) : plusieurs CF pour lesquels $I > CF$
- Il est donc préférable de rester sur le Calcul de la VAN créatrice de valeur ou non.



1. Les principes de base du Trésorier

2. Le Taux d'Intérêt

2.1 Le taux d'intérêt simple

2.2 Le taux d'intérêt Composé

2.3. Le Taux d'intérêt précompté et postcompté et Taux d'intérêt équivalent

2.4 Le taux d'intérêt réel et taux d'intérêt nominal

3. Time Value of Money

3.1 La détermination des Flux

3.2 La Capitalisation

3.3 L'Actualisation

3.4 La Valeur Actuelle

3.5 La Valeur Actuelle Nette (VAN)

4. Exercices

CAS PRATIQUES



15'

1. Vous placez 10000 € sur 4 ans au taux annuel de 5%. Quel est le montant des intérêts que vous percevrez ?
2. Vous placez 10000 € pendant 3 mois au taux annuel de 4%. De quelle somme disposez vous après 3 mois ?
3. Quel Le taux annuel équivalent à un taux mensuel de 0,5% ?
4. Combien doit-on placer aujourd'hui pour disposer d'une somme de 2600 € dans 5 ans sachant que le taux de placement est 4.5 % par an.
5. Vous souhaitez vous constituer un apport afin de renouveler votre voiture dans 3 ans. Vous pouvez placer 500 € par mois au taux de 3 %. De quel capital disposez vous à la fin des 3 ans ?
6. Combien dois-je épargner tous les mois pour pouvoir acheter la voiture de 20 000 euros ?
7. Vous investissez 1000€ dans 1 mois, 750 € dans 2 mois et 250 € dans 3 mois. De quel montant disposez vous si le taux d'intérêt mensuel est de 0,5%