Lisez bien l'énoncé, on justifiera clairement chaque réponse.
Cette feuille doit être rendue signée et placée à l'intérieur de la copie.
Aucun appareil électronique ne doit être utilisé sous peine d'avoir une note de 0.

Exercice 1 : Calcul de dérivée (4 pts)

Soit $f(x, y) = y \exp(-x + 2y)$ une fonction de 2 variables.

1. Déterminez l'ensemble de définition de f .
2. Déterminez les dérivées première de f .
3. Déterminez les dérivées seconde de f .

Exercice 2 : Famille génératrice (3 pts)

Soit a un paramètre de $\mathbb{R}$. On définit 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Est-ce que la famille $\{V_1, V_2, V_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 : Application linéaire (7 pts)

Soit $f(x, y, z) = (x + (a+1)y - (a+1)z, (a+1)x + y - (a+1)z, (a+1)x + (a+1)y - 2(a+1)z)$ et a un réel

1. Justifiez rapidement que f est linéaire.
2. Donner les espaces de départ et d'arrivé de f .
3. Calculer le noyau de f
4. Calculer le rang de f
5. Est-ce que f est injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 3 : Diagonalisation (7 pts)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A
2. Est-ce que M est diagonalisable ? Vous vérifierez les valeurs propres avec les méthodes usuelles.
Si M est diagonalisable, vous donnerez les matrices P et D .