UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE
UFR de GESTION
Examen de Mathématiques
LICENCE 2ème année
JANVIER 2016, Durée : 1h30

Documents, calculatrices, téléphones portable ou lecteurs mp3 interdits. Justifiez tous les résultats. Soyez clair(e) et précis(e). Le barème est donné à titre indicatif.

I Système récurrent (7,5 points)

On étudie le modèle suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 3y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = x_n + 4y_n + z_n \\ z_{n+1} = y_n - z_n \end{cases}$$

a) Diagonalisez la matrice A du **système homogène** (On triera les valeurs propres par ordre croissant, on fera les vérifications usuelles et on choisira des vecteurs propres tels que la première composante non nulle soit 1, on calculera P^{-1}).

b) Donner les solutions explicites du **système homogène** en fonction de paramètres.

c) Calculez les précédents paramètres en fonction des conditions initiales x_0, y_0 et z_0.

d) On suppose maintenant que le système a un second membre.

On a donc $X_{n+1} = A.X_n + B$ où $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Déterminez le ou les points stationnaires de ce **système**.

II Optimisation (6,5 points)

On cherche à optimiser la fonction suivante :
$f(x, y, z) = x + y + z$
sous les contraintes $xz + xy - x^2 = 1$ et $z - 2x = 0$

a) Formulez un problème simplifié équivalent en gardant la première contrainte puis montrez que l'on peut utiliser la méthode du lagrangien.

b) Déterminez le ou les points candidats du problème simplifié.

c) Déterminez la nature des points candidats pour le problème simplifié.

d) Quel est le maximum global et le minimum global du problème simplifié (justifiez) ?

III Approximation (4 points)

Soit $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 y} - 2xe^y$

a) Calculez les dérivées premières et les dérivées secondes.

b) Rappelez la formule d'un développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de plusieurs variables en un point (a,b).

c) En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f en $(0; 0)$.

d) En déduire une valeur approchée de f en $(-0.2; 0.1)$. Equation plan tangent ?

IV Question de cours (2 points)

Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application C^∞. Rappelez la définition d'une application homogène de degré k. Sachant que u est homogène de degré k, montrez que les dérivées partielles premières de u sont aussi homogènes d'un degré à determiner.