

Contrôle d'algèbre

Calculatrice, téléphone et matériels de cours/TD interdits

45 minutes

Mardi 23 octobre 2018

Exercice 1 : Questions de cours (1 point)

- Est-ce que $\mathbb{R}^2$ forme un s.e.v de $\mathbb{R}^3$? Justifiez.
- Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} 3a \\ 2a-1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$. E est-il un s.e.v de $\mathbb{R}^2$? Si oui, quelle est sa dimension ? Si non, justifiez pourquoi.

Exercice 2 : Base et système linéaire (5 points)

Soient $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de t , la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$?

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Application linéaire (10 points)

Soit $f(x, y) = (y, x, y)$.

- Donnez les espaces de départ et d'arrivée. Justifiez que f est une application linéaire.
- Déterminez le noyau de f et trouvez une base du noyau de f . Quelle est la dimension du noyau de f ?
- Énoncez le théorème du rang. Trouvez le rang de f et une base de $\text{Im } f$.
- f est-elle injective, surjective, bijective ?
- Quelle est la matrice représentative de f , $\mathcal{M}_f$? Quelle est la matrice transposée, ${}^t\mathcal{M}_f$? Calculez le produit $\mathcal{A} = \mathcal{M}_f \cdot {}^t\mathcal{M}_f$. $\mathcal{A}$ est-elle diagonalisable ?
- Diagonalisez $\mathcal{A}$ et déterminez ses espaces propres : On donne $\det \mathcal{A} = 0$. En déduire que 0 est valeur propre. Montrez que $P(\lambda) = \lambda(\lambda - a)(\lambda - b)$, a et b sont à déterminer. Classez les valeurs propres en ordre croissant. Les vecteurs propres sont à déterminer tel que la première composante non-nulle soit 1.

Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction d'une matrice diagonale $\mathcal{D}$ et d'une matrice de passage $\mathcal{P}$. Calculez l'inverse de $\mathcal{P}$.

Exercice 4 : Autour de quelques fonctions (4 points)

Soit $f(x, y) = \frac{e^{x^2}}{1 + xy}$.

- Calculez le gradient de f .

Soit $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x+1}$.

- Calculez le développement limité de g à l'ordre 2 en 0.