UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE

UFR de GESTION

Examen de Mathématiques

LICENCE 2ème année

JANVIER 2022, Durée : 1h30

Documents, calculatrices, téléphones portable ou appareils électroniques connectés interdits. Justifiez tous les résultats. Soyez clair(e) et précis(e). Le barème est donné à titre indicatif.

I Question de cours (2 points)

Rappeler la définition sous forme de limite de la fonction dérivée d'une fonction dérivable d'une variable $f(x)$.

Rappeler la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions lorsque celles-ci sont effectivement dérivables et démontrez la.

II Algèbre linéaire (7,5 points)

Soit $u(x, y, z) = (2x - y + z, -x + 3z, 3x - y)$

a) Calculez le noyau et l'image de u. Quelles propriétés peut-on en déduire ?

b) Déterminez A, la matrice représentative de u pour les bases canoniques.

c) Calculez la matrice A^{-1} lorsque cela est possible.

d) Trouvez le ou les antécédents de $(2, 2, 2)$ par u.

e) Déterminez les valeurs propres de A. (Triez les v.p. par ordre croissant et vérifiez vos résultats avec les méthodes usuelles).

f) La matrice A est-elle diagonalisable ? (Justifiez soigneusement, pour les vecteurs propres on prendra des vecteurs dont la 1ere composante non nulle vaut 1).

g) Donnez toutes les matrices de la décomposition en matrice diagonale. (On calculera donc P^{-1}).

III Approximation (4,5 points)

Soit $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y} + e^{xy} - (1+x)^2$

(si nécessaire vous êtes autorisé à exprimer la racine sous forme de puissance)

a) Calculez les dérivées premières et les dérivées secondes de f.

b) Rappelez la formule d'un développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de plusieurs variables en un point (a,b).

c) En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f en $(0;0)$.

d) En déduire une valeur approchée de f en $(0.1;0.1)$.

e) Donnez l'équation du plan tangent au graphe de f en $(0;1)$.

IV Optimisation (6 points)

On cherche à optimiser la fonction suivante :

$f(x,y,z) = x^2y - \frac{1}{3}y^2z$

sous les contraintes $x^2 + yz = 1$ et $z - y = 0$

a) Formulez un problème simplifié équivalent puis montrez que l'on peut utiliser la méthode du lagrangien.

Pour la suite on ne s'occupera plus que du problème simplifié.

b) Déterminez les points candidats du problème simplifié.

c) Tracez le domaine d'optimisation et localisez sur ce dessin votre ou vos points candidats.

d) Déterminez la nature de votre ou de vos points candidats d'ordonnée la plus élevée en utilisant les CS2.

e) Calculez la valeur de l'objectif aux autres points candidats.

f) Le problème admet-il un maximum global et un minimum global (justifiez) ? Si oui donnez la valeur du maximum global et du minimum global.