

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i v_i = \vec{0}_E \Rightarrow v_i \alpha_i = 0$$

donc  $u(v_1) \dots u(v_p)$  libre

## Chap 2 Les matrices

### I Opérat° sur les matrices

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x \end{pmatrix}$$

énoncé :  $M = [u(1,0); u(0,1)]$  au lieu de calculer l'image dans la base canonique

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M = \left[ u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^\beta$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^\beta$$

énoncé :  $u(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \\ x \end{pmatrix}$

p. 16

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calculer la Matrice rep de  $u$  ac c° base de départ  $\begin{pmatrix} 1, 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1, -1 \end{pmatrix}$  et base d'arrivée canonique

Calculer  $u \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  par la méthode matricielle

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{\beta} \leftarrow \text{ds la base } \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha = 5 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 5/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$$

$$u \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = u \left( \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{\beta} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{\beta} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 2 \times 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{vérification}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\vec{v} \text{ colonne de } \gamma}$

$$u(X) = M_{\gamma} \times (X)_{\beta} \leftarrow \begin{matrix} \text{coordonnées de base } \beta \\ \uparrow \quad \quad \quad \swarrow \\ \text{matrice rep de } u \quad \vec{v} \text{ colonne} \end{matrix}$$

matrice rep de  $u$

avec  $\beta$  cō base de départ et  $\gamma$ : base d'arrivée.  
 $\hookrightarrow \vec{v}$  colonne.

### 1.2. Somme et différence de matrices

On pr déf la  $\Sigma$  et  $\neq$  de  $M$  pr des  $M$  de  $\hat{m}$  ordre m.p  
 Ainsi si  $A = [a_{ij}]$  et  $B = [b_{ij}]$  alors  $A+B = [c_{ij}]$   
 où  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

De  $\hat{m}$  pr la soustraction

$$\text{ex: } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

### 1.3. Produit d'une cste par une $M$ .

#### 1.4 Produit de M.

Soit  $A$  une M d'ordre  $n.p$  alors le produit  $AB$  n'est défini que si nb de col de  $A$  = nb de lignes de  $B$ .

$$A = [a_{ij}] \quad B = [b_{ij}]$$

$$AB = \left[ \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right]$$

$$\text{ex: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \\ -4 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Explicit' au niveau des applicat' linéaires.

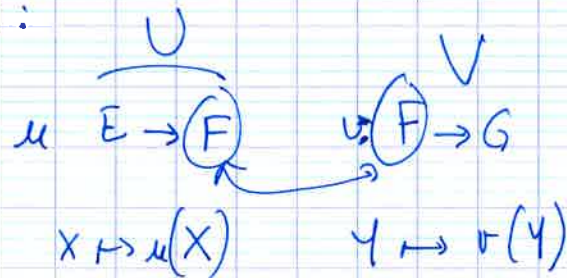
Soient  $u: E \rightarrow F$  et  $v: F \rightarrow G$

alors on pt def l'appli li  $v \circ u: E \rightarrow G$ .

en définissant pour  $x \in E$ :  $v \circ u(x) = v(u(x))$

On peut alors vérifier que si  $U$  et  $V$  st les matrices rep de  $u$  et  $v$ , alors  $v \circ u$  a pr M rep  $V \cdot U$ .

ex:



$v \circ u: E \rightarrow G$

$$x \mapsto v(u(x))$$

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = V[U \cdot x] = [V \cdot U] x$$

Rmq: • le  $\pi$  des M est associatif.

$$A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

• le  $\pi$  est distributif sur l'addition

$$A(B + C) = AB + AC$$

- le  $\pi$  des  $M$  n'est en revanche pas commutatif.  
Ainsi  $A.B \neq B.A$  p.  $A$  et  $B$  quelconque.  
De +, le résultat n'est pas forcément de même taille.

## 2 Matrices particulières

- $M$  carrée = nb ligne = nb colonne.  
On dit que  $M$  est d'ordre  $n$  qd carré.



- $M$  diagonale : Si ts les él en dehors de la diago nuls

$$M_{\text{diagonale}} = \begin{pmatrix} & & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{\text{sup}} :$

$$\begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{\text{triangulaire inf}} :$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

- Transposée de  $M$ .

$$M = [a_{ij}] \quad {}^t M = [a_{ji}]$$

On inverse les colonnes et les lignes

ex :

$${}^t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

je lis en ligne et écris en colonne.  
(Si carrée : jeu de miroir mais + long)

- $M$  carrée est symétrique si  
 $M = {}^t M$ .

$$\text{ex } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = M \quad {}^tM = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow {}^tM = M \Rightarrow M$  est symétrique.

matrice nulle et identité aussi  
matrice diagonale aussi

$$M_{\text{identité}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

matrice ligne  $[ \quad ]$

matrice colonne  $\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

- $M$  idempotente :  $\hat{m}$  puissance.  
si  $M \cdot M = M$

on retombe sur la  $\hat{m}$   $M$  si on fait des puissances  
→ démontrat<sup>o</sup> par récurrence.

$$\text{ex : } \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^2 = M \Rightarrow \text{idempotente}$$

$(2 \times 3) \cdot (3 \times 2)$

- $M$  nilpotente :  $M^n = [0] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$M^0 = I \leftarrow$  matrice identité.

Rmq calcul difficile pr  $M^{36}$  de calculer + vite  
en faisant  $M^2$  puis  $(M^2)^2$  au lieu de calculer

⚠  $(M^4)^4 = M^8$

ex : 
$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$
 est elle nulle ?

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \downarrow & \\ \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ & \uparrow & \\ & M^2 & \end{array}$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow M \text{ est nilpotente}$$

$$\Delta : M^3 = M^2 \times M$$

dans cet ordre et non  $M \times M^2$ .

Déterminant :

notion de forme multilinéaire.

$$f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

(i) Ppe de multi li par rapport à chaque  $\Delta$  able

$$\forall i \leq n,$$

$$f(x_1, \dots, \alpha x_i + \beta x'_i, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \beta f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)$$

Ppe d'alternance :  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Prop : une forme multi alt est nulle si  $2 \vec{v}$  st égaux.

La valeur de  $f(X_1 \dots X_n)$  est inchangée si on ajoute à l'une des  $\Delta$ ables une combi li des autres  $\Delta$ able

$$f(X_1, \dots, X_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j X_j, X_1 \dots X_n)$$

Par linéarité de la  $\Delta$ able =  $f(X_1 \dots X_i \dots X_n)$

$$+ \sum_{j \neq i} \alpha_j f(X_1 \dots \overset{\substack{\uparrow \\ \text{ième et jème} \\ \text{position}}}{X_j} \dots X_n)$$

$$= f(X_1 \dots X_i \dots X_n)$$

Calcul du déterminant  $\rightarrow$  forme multilinéaire alternée particulière.

Si  $\vec{v}$  liés  $\rightarrow \det = 0$   
 famille de  $\vec{v}$

Det d'une matrice simple :

$$\det M = \det(a) = |a| = a$$

$\nearrow$  pas la valeur absolue mais déterminant pour Matrice  $1 \times 1$ .

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

ex :  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 3 = 5 \neq 0 \rightarrow$  famille de  $\vec{v}$  libre

Pour les matrices  $3 \times 3$  mais pas  $4 \times 4$   $\triangle$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow \text{on répète les } 2 \text{ } \rightarrow \text{ } 1^{\text{er}} \text{ } \text{col. à la fin}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \det = aei + bfg + cdh - gec + hfa + idb$$

ex  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det = 2 + 6 + 24 - (12 + 3 + 8) = 9.$$

Calcul général du det pour une M carrée.

On appelle mineur de  $a_{ij}$ , le terme  $\Delta_{ij} = \det M_{ij}$   
Où  $M_{ij}$  est la matrice obtenue en supprimant la  
i ème ligne et j ème colonne

On appelle cofacteur ..

Rmq: le cofacteur de  $a_{ij}$ ,  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$  car  $\Delta_{ij}$  est  
le mineur principal de  $a_{ij}$ .

ex:  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$  calculez  $\Delta_{22}$  et  $A_{22}$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \Delta_{22} = -10$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{23} = 3 = -(-3) = +3$$

Dét :

$$\forall i : \det M = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \times \Delta_{ij}$$

$$\forall j : \det M = \sum_{i=1}^n a_{ij} \times A_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Delta_{ij}$$

$$\text{ex : } \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 8 - 0 - 36 = -28$$

Il vaut mieux choisir une ligne ou colonne avec le + de zéros possible.

Dét du produit de matrice  $(n \times n)$  est égal au produit des déterminants.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

fgt° que si M carrées d'origine.

Faire apparaître des zéros de la 1ère colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 21 = 23$$

Rang d'une matrice.

Soit  $M$  une matrice (d'ordre  $n \times m$ )

Déf : On appelle matrice extraite d'ordre  $p$  une  $M$  carrée construite en sélectionnant  $p$  lignes et  $p$  colonnes de  $M$  et en ne gardant ainsi que les él sélectionnés.

ex  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

3 matrices extraites d'ordre 2

6 matrices extraites d'ordre 1

les entrées de la matrice.

rang d'une  $M$  (non nécessairement carrée) d'ordre de la + gde matrice extraite de  $\det$  non nul.

ex  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ex :  $\det = 0$  Rang  $< 2$ .

$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det |2| = 2 \neq 0$

Rang  $= 1$ .

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rg} = 2$ .

Rg d'une fa de  $v = \text{rg matr composé de } v \text{ de la famille}$

ex :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ .



p23 ex :  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$   
 $\uparrow \quad \uparrow$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$  donc rang = 2  
 La famille est génératrice

Rg d'une appli  $L_i$  = dim de Im de  $f$

p23 ex :  $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$

Noyau :  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } u$ ssi  $\begin{cases} y - x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -L_1 \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Sigma \text{ triangulaire sup ac } z = 0$

$\begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Ker } u = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R} \right\}$

$\uparrow$  représente une droite dirigée par  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dim \text{Ker } u = 1$

\* Th du Rang :  $\dim \text{Ker } u + \text{Rang } u = \dim E$

$\text{Rang} = 3 - 1 = 2 = \text{Rang}$

Matrice associée à cette A.L :

On prend la base canonique pour la base de départ :

\*  $M = \left[ u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrice extraite :  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{Rang } M = 2$

⚠ Écrire en  
colonne!

p24

pas = ité

$$\text{ex : } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_1/2 \\ L_2 - L_1' \\ L_3 - 3L_1' \\ L_4 + L_1' \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -5 & 1/2 & -9/2 \\ 0 & 7 & 7/2 & 21/2 \end{pmatrix}$$

Etape 2: IP faut s'occuper de la ligne 2; pbm: il vaut zéro donc on intervertit les lignes

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_3 \\ \rightarrow L_2 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & -5 & 1/2 & -9/2 \\ 0 & 7 & 7/2 & 21/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_4 \\ L_3 \\ L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 7 & 7/2 & 21/2 \\ 0 & -5 & 1/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

cette ligne se divise bien par 7 donc on l'a choisie

pour faire apparaître le 1  $\rightarrow 5L_2' + L_3$

$$\begin{matrix} \rightarrow L_1 \\ L_2/7 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

⚠ pour les det : pas le droit d'intervertir les lignes

$$\begin{matrix} \rightarrow L_3/3 \\ L_4 + L_2' \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang = 3

→ toujours dernière ligne nulle  
Réduite de Gauss = M Δaire sup.

→ fonctionne aussi ac matrice rectangulaire

## p24 II Inversion de matrice.

\*  $M$  carrée  $\det M \neq 0 \rightarrow \text{Rang } M = n = \dim F$   
 $\hookrightarrow u$  surjective

$$\text{Rang } M = \dim E$$

$$\text{Th. rang} \Rightarrow \dim \text{Ker } u = 0$$

$$\text{Ker } u = \{ \vec{0}_E \} = 0$$

$\Rightarrow u$  injective  $\Rightarrow$  bijective

On peut définir  $u^{-1}: F \rightarrow E$

$y \rightarrow$  antécédent par  $u$

\*  $u$  bijective linéaire  $\Rightarrow u^{-1}$  linéaire.

$$u^{-1}: F \rightarrow E$$

$$\text{Soient } (X, Y) \in F^2$$

$$(\alpha, \beta) \in K^2$$

$$u^{-1}(\alpha X + \beta Y) ?$$

Comme  $u$  bijective  $\exists x \in E$  tq  $X = u(x)$

$\exists y \in E$  tq  $Y = u(y)$

$$u^{-1}(\alpha X + \beta Y) = u^{-1}(\alpha u(x) + \beta u(y))$$

$$= u^{-1}[u(\alpha x + \beta y)]$$

$$= \alpha x + \beta y$$

$$= \alpha u^{-1}(X) + \beta u^{-1}(Y)$$

$\Rightarrow$  donc  $u^{-1}$  linéaire

Soit  $N$  la matrice représentable de  $u^{-1}$

$$\vec{u}(u(X)) = X = \vec{u}(MX) = (NM).X$$

$$\text{donc } N.M = I$$

donc effectivement  $u^{-1}$  est représentée par  $M^{-1}$

$M^{-1}$  l'inverse pour la multiplication de la matrice représ. de  $u$ .

1) Méthode des cofacteurs.  
= Matrice des cofacteurs.

ex:  $M \times M^* = [a_{ij}] \times [A_{ji}] =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j1} & \dots & A_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{jm} & \dots & A_{jn} \end{bmatrix}$$

where  $C_{ij}$  is indicated in red in the original image.

$$C_{ij} = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}$$

On va dém que tout est nul en dehors de la diagonale principale

\* Si  $i=j$   $C_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \det M$  par définition

\* Si  $i \neq j$

on insère la ième ligne  
à la place de la jème  
le reste est inchangé

$$\begin{matrix} i \rightarrow \\ j \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0 = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn}$$

donc  $C_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ .

$$M \cdot M^* = \begin{bmatrix} \det M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \det M \end{bmatrix} = \det M \times I$$

$$\left( M \times \frac{1}{\det M} \right)^t C_0(M) = I \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t C_0(M)$$

pare de l'autre côté

ex.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 - L_2 \begin{bmatrix} \oplus & \ominus \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{matrice inversible}$$

$$Co(M) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Co(M) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$tCo(M) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2} \times tCo(M) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

⚠ Lorsque on a un coeff :  
 \* devant un det : on pr l'intégrer ds 1 seule ligne ou colonne  
 \* devant une matrice : on multiplie chaque chiffre  
 verif  $M \times M^{-1} = I$   
 et non  $M^{-1} \times M$ .



## 2) Méthode des pivots.

$$\text{ex: } \begin{pmatrix} 2x+2y \\ x+2y+2z \\ -2x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{u } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} X & Y & Z & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Cas particulier

\*  $\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & & & \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 1 & & & \end{array}$

embêté

donc intervenir toute la ligne

\*  $\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \end{array}$

→ veut dire que M pas inversible

p 26

## 2.3 Système d'éq linéaire

Si  $b \notin \text{Image}$ , il n'a pas d'antécédent donc il n'y aura aucune sol.

Si  $b \in \text{Im}$  : au - une solution

Si l'appli est injective : 1 seule sol. + noyau  
n'est pas injective : infini de sol. + noyau

Soit  $X'$  une solution

$$AX' = b$$

Soit  $X''$  un él du noyau

$$AX'' = (0)$$

$$A(X' + X'') = b$$

antécédent de  $b$

Si l'applic est bijective : il faut que  $n = p \rightarrow$  matrice carrée

Si  $b = 0$  sous espace affine

p 27

Cramer :

rang =  $n$  si  $M$  carrée et  $\det \neq 0$

$\rightarrow$  surjective

mais rang =  $m$  dim q'espace de départ

et selon th. du rang  $\rightarrow M$  bijective  $\rightarrow$  unique solution

$\rightarrow$  cherche par la bijection réciproque.

$$MX = b$$

Si  $M$  inversible

$$M^{-1}(MX) = M^{-1}b$$

$$\text{associativité} \rightarrow (M^{-1}M)X = M^{-1}b$$

$$IX = X = M^{-1}b$$

Cramer propose une autre solution

$$\text{ex: } \begin{cases} 2x + z = 1 \\ y + z = 3 \\ -y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{en sommant } L_2 + L_3 \Rightarrow z = \frac{5}{3}$$

(donc ici pas vraiment besoin de Cramer)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (2 + 1) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{C'est un système de Cramer}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3-5) = -2$$

$$X = \frac{\Delta_x}{\det M} = \frac{-2}{6} = \boxed{-\frac{1}{3} = X}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(6-2) = 8 \quad Y = \frac{8}{6} = \boxed{\frac{4}{3} = Y}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2+3) = 10 \quad Z = \frac{10}{6} = \boxed{\frac{5}{3} = Z}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \text{ en vérifie en réinjectant ds les équations.}$$

Méthode du pivot

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow L_{1/2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_3 + L_2 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \times \frac{3}{2} \\ L_3 \times \frac{1}{3} \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 3 - \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array} \right] = \begin{array}{l} \frac{3-5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

système sous déterminé : moins d'équat<sup>o</sup> que d'inconnues  
 → veut dire pas de sol

! attention à celles qui sont incompatibles

système sur déterminée : plus d'éq que d'inconnues

Mais  $\Delta \begin{cases} x+y=2 \\ x=3 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \text{pas de solut}^o \text{ eq incompatibles}$

(car la 3<sup>e</sup> eq peut être une combi li des 2 premières  
 eq qui se répète donc se ramène à autant de sol  
 que d'inconnues.

P 28

Diagonalisation

Calculer image d'image d'image.

→ on cherche une base particulière qui agit comme une homothétie.

idée : construire base particulière.

en fait de la base considérée on s'a des coordonnées fixes.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_A = \sum_{j=1}^n x_j A_j$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B = \sum_{i=1}^n y_i B_i$$

ex p 28

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underset{\alpha}{(x-y)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\beta}{y} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ faire un système  $\begin{cases} \alpha + \beta = X \\ \beta = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = X - Y \\ \beta = Y \end{cases}$

Dans la base  $\gamma$   $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X-Y \\ Y \end{pmatrix}_\gamma \quad \gamma \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

⚠ sens de la flèche peu intuitif  
 $P_{A \rightarrow B}$

$$X_A = P_{A \rightarrow B} Y_B$$

$$P_{A \rightarrow B} = \underbrace{(B_1 \dots B_n)}_{\text{dans la base A}} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P_{\text{Base Canonique}} \xrightarrow{\text{Base}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ rien à calculer.  
 qd base canonique au départ

Ex p 29 :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P_{A \rightarrow B} = P_{B \rightarrow A}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

$$P_{B \rightarrow A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_A$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dans la base B : } P_{B \rightarrow A} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_A$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

$$\text{Vérif } \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_B = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

p30

Matrices équivalentes

A représente  $u$  avec  $\beta_A$  base de  $E$   
et  $\gamma_A$  base de  $F$

B  $\beta_B$  base de  $E$   
et  $\gamma_B$  base de  $F$

$$u(X) = A X_{\beta_A} = B X_{\beta_B}$$

$$u(X) = \underbrace{B X_{\beta_B}}_{\text{coordonnées de } \gamma_B}$$

$$= A X_{\beta_A}$$

$$= A \underbrace{P_{\beta_A \rightarrow \beta_B}}_{\text{coordonnées de } \gamma_A} X_{\beta_B}$$

$$= P_{\gamma_B \rightarrow \gamma_A} [A P_{\beta_A \rightarrow \beta_B} X_{\beta_B}]$$

$$= \underbrace{\left[ \underbrace{P_{\gamma_B \rightarrow \gamma_A}}_Q \underbrace{A P_{\beta_A \rightarrow \beta_B}}_P \right]}_{\substack{\parallel \\ B}} X_{\beta_B}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

rang = 2

rang = 2

car matrice extraite  $\neq 0$ 

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang} = 2$$

Les matrices sont donc équivalentes

Matrices diagonalisables :

( Si  $\exists P$  tq  $B = PAP^{-1}$  alors A et B semblables )

On suppose A représente  $\mu$  avec la base  $\beta_A$  au départ et à l'arrivée.  
 B " " " " " " " "

$$\mu(X) = \underbrace{AX_{\beta_A}}_{\text{coordonnées dans } \beta_A}$$

$$\mu(X) = \underbrace{BX_{\beta_B}}_{\hookrightarrow \beta_B}$$

$$\mu(X_{\beta_B}) = A \left( \underbrace{P_{\beta_A \rightarrow \beta_B} X_{\beta_B}}_{\text{dans } \beta_A} \right)$$

$$\mu(X) = \underbrace{\begin{pmatrix} P_{\beta_B \rightarrow \beta_A} & A \cdot P_{\beta_A \rightarrow \beta_B} \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ B}} \underbrace{X_{\beta_B}}_{\hookrightarrow \beta_B}$$

$$P = P_{\beta_B \rightarrow \beta_A} \quad P^{-1} = P_{\beta_A \rightarrow \beta_B}$$

Les matrices sont donc équivalentes

**p31 Preuve**

Soient  $U \in E_\lambda$

$V \in E_\lambda$

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \mu(\alpha U + \beta V) &= \alpha \mu(U) + \beta \mu(V) \\ &= \alpha(\lambda U) + \beta(\lambda V) \\ &= \lambda(\alpha U + \beta V) \quad \text{donc } \alpha U + \beta V \in E_\lambda \end{aligned}$$

$E_\lambda$  est un sev

Supposons  $V \in E_\lambda$  et  $V \in E_\mu$

$$\mu(V) = \lambda V \quad \mu(V) = \mu V$$

$$\lambda V = \mu V \Rightarrow (\lambda - \mu)V = \vec{0}$$

$$\text{or } V \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu$$

$$\mu(V) = \lambda V$$

$\mu$  est représenté par  $A$

$$AV = \lambda V$$

$$AV - \lambda V = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I) \cdot V = \vec{0}$$

$V$  est un vecteur propre ( $\neq \vec{0}$ )

$$\text{associé à } \lambda \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$x^2 + 1 = 0 \quad x^2 = -1$$

$$x^2 = -1$$

**Preuve p31** Si  $A$  diagonalisable  $A = PDP^{-1}$

$$\det A = \det(PDP^{-1})$$

$$= \det P \times \det D \times \det P^{-1}$$

$$= \det P \det D \frac{1}{\det P}$$

$$= \det D$$

$$= \prod_{i=1}^n \lambda_i = \text{Trace}$$

**Ex p32**

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -x+2z \\ -2x+y+2z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$G+G_2+G_3$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1-\lambda & -\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda-1 & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda-1)(3-\lambda)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)(3-\lambda)$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 3$$

3 vp simple  $\stackrel{n=3}{\implies}$  implique  $A$  diago

$$\text{Trace} = 1+0+2 = -1+1+3 = \sum \lambda_i \text{ ok}$$

$$\det = -3 = \prod \lambda_i \text{ ok}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$E_{\lambda_1} = -1$$



Reprendre la  $M$  d'origine et pas la matrice simplifiée pour trouver de l-

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ -x+y+2z \\ -2x+y+3z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x + y/2 - z/2 = 0 \\ 3y/2 + 3z/2 = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 0 \\ y + z = 0 \\ z = z \end{cases}$$

$$= z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x = z \\ y = -z \\ z = z \end{matrix}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$

$E_{\lambda_2} = 1$ : Si je me trompe de valeur propre (ex:  $\lambda_2 = -2$ ), j'obtiens un vecteur propre nul.

$$M - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  par substitution  $\begin{cases} y = z \\ x = z \\ z = z \end{cases}$

$$E_{\lambda_2} = 1 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} \quad V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \\ -7y/2 + 5z/2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/7 z \\ y = 5/7 z \\ z = z \end{cases}$$

$$V_3 \begin{pmatrix} -1/7 \\ 5/7 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{on veut 1 ici}$$

$$A = P D P^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Méthode à utiliser.

\* Pour les matrices  $3 \times 3$ :  $\begin{cases} \text{Comatrice} \\ \text{Pivot de Gauss} \end{cases}$

\* Pour les  $n \times n \rightarrow$  Pivot de Gauss

$$x \neq 0$$

$$0^x \rightarrow = 0$$

$$x = 0$$

$$0^0 \rightarrow = 1$$

Méthode de Gauss :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} L_1 - L'_2 \\ L'_2 \\ L_3 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} L_1 - 3L'_3 \\ \Rightarrow L_2 + 2L'_3 \\ -\frac{1}{8}L_3 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/8 & -1/2 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 0 & -1/8 \end{array} \right]$$

p 32

Puissance d'une matrice

Si A est diago, alors  $A^k = P D^k P^{-1}$  ( $k \in \mathbb{N}$ )

→ Dém par récurrence.

$$k = 0 \rightarrow A^0 = I.$$

$$P \times D^0 \times P^{-1} = P \cdot I \cdot P^{-1} = P P^{-1} = I$$

OK

$$k = 1$$

Si A est diago

$$A^1 = A = P D P^{-1} \quad \text{OK}$$

$$k \rightsquigarrow k+1$$

$$A^k = P D^k P^{-1}$$

$$A^{k+1} = A \times A^k = P D P^{-1} \times P D^k P^{-1}$$

$$P D I D^k P^{-1} = P D^{k+1} P^{-1} \quad \text{QED}$$

Rmq : Si D diagonale,  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^k = ?$$

je commence par diagonaliser

A est symétrique donc diagonalisable

$$* \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) \\ = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$$

Vérif : Trace :  $\sum \lambda_i = 4$  .  $\frac{2+2}{\sum \text{diag}} = \frac{3+1}{\sum \lambda_i}$

$$\text{Det} = 4 - 1 = 3 = 3 \times 1 = \prod \lambda_i \quad \text{ok.}$$

$$E_{\lambda_1} = 1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=x \end{cases} \quad V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = 3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=x \end{cases} \quad V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de  $A^k = P D^k P^{-1}$

$$P^{-1} D^k P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} \frac{3^k-1}{2} & \frac{3^k-1}{2} \\ \frac{3^k+1}{2} & \frac{3^k+1}{2} \end{bmatrix}$$



Si on remplace k par 0 : on ne trouve pas la matrice identité  
 $k=1 \rightarrow$  matrice de départ pour vérif.