UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE
UFR de GESTION
Examen de Mathématiques
LICENCE 2ème année
JANVIER 2017, Durée : 1h30

Documents, calculatrices, téléphones portable ou lecteurs mp3 interdits. Justifiez tous les résultats. Soyez clair(e) et précis(e). Le barème est donné à titre indicatif.

I Système récurrent (7,5 points)

On étudie le modèle suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + 3z_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n + 3z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 3z_n \end{cases}$$

a) Diagonalisez la matrice A du **système homogène** (On triera les valeurs propres par ordre croissant, on fera les vérifications usuelles et on choisira des vecteurs propres tels que la première composante non nulle soit 1, on calculera P^{-1}).

b) Donner les solutions explicites du **système homogène** en fonction de paramètres.

c) Calculez les précédents paramètres en fonction des conditions initiales x_0, y_0 et z_0.

d) On suppose maintenant que le système a un second membre.

On a donc $X_{n+1} = A.X_n + B$ où $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Déterminez le ou les points stationnaires de ce **système**.

e) Calculez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$u = 2xy \quad v = (1+y^2)^{-1}$
$u' = 2x \quad v' = -2y(1+y^2)^{-2}$

$u'v + uv'$

$= 2x(1+y^2)^{-1} - 4xy^2(1+y^2)^{-2}$

$f'_x = \ln(1+y^2) + ye^x$

$f'_y = \frac{2xy}{1+y^2} + e^x$

$f''_{x^2} = ye^x$

$f''_{xy} = \frac{2y}{1+y^2} + e^x$

$f''_{y^2} = 2x \cdot \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$

II Approximation (4,5 points)

Soit $f(x,y) = x\ln(1+y^2) + ye^x$

a) Calculez les dérivées premières et les dérivées secondes.

b) Rappelez la formule d'un développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de plusieurs variables en un point (a,b).

c) En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f en $(0;0)$.

d) En déduire une valeur approchée de f en $(0.1;0.2)$.

e) Donnez l'équation du plan tangent à f en $(1;0)$

III Suite récurrente (6 points)

a) Etudiez les suites vérifiant l'équation suivante :

$$X_{n+4} + X_{n+3} - 1 = 4(X_{n+2} + X_{n+1}) + 6n + 6 + 16 * 2^n$$

b) Déterminez parmi ces suites celle qui vérifie $X_0 = -1/3$, $X_1 = -2/3$ et $X_2 = 10/3$

IV Question de cours (2 points)

Soit W une partie d'un espace vectoriel E. Que doit vérifier W pour être un sous espace vectoriel de E ?

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Rappelez la définition de $Ker u$ et montrez que c'est un sous espace vectoriel d'un espace à préciser.