Chapitre 1 : ESPACES VECTORIELS

Espaces vectoriels :

Définition *U est une combinaison linéaire des vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ si U peut s'écrire* $\boxed{U = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i . V_i}$ *où $\alpha_i \in K$*

Proposition *L'ensemble des combinaisons linéaires de p vecteurs de E est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition *On appelle somme des sous espaces vectoriels $F_1, F_2, ...F_p$ l'ensemble défini par :*
$Vect\,(F_1 \bigcup F_2 \bigcup ... \bigcup F_p)$.

Il est facile de montrer que

$$\boxed{F_1 + ... + F_p = \left\{ x \in E \,|\exists x_i \in F_i : x = \sum_{i=1}^{p} x_i \right\}}$$

Définition *La somme de sous espaces $F_1, F_2, ...F_p$ est dite directe si tout vecteur X de la somme se décompose de façon unique sur cette somme. On note alors $F_1 \ominus ... \oplus F_p$*

Définition *On dit que deux sous espaces vectoriels sont supplémentaires si leur somme directe recouvre l'espace E tout entier.*

Famille libre /liée :

Liée : ≠ 0

Définition *p vecteurs de E sont dits* ***linéairement dépendants*** *s'il existe p scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i . V_i = \vec{0}$*

exprimer 1 des vecteurs comme une combi des autres

On dit aussi que la famille de vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ est **liée**.

ex: $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$ $\quad L2-L1' \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ \beta = \beta \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha = -3\beta \\ \beta = \beta \end{cases}$ $\quad S = \left\{ \begin{pmatrix} -3\beta \\ \beta \end{pmatrix} / \beta \in \mathbb{R} \right\}$

La famille est liée.

Libre : = 0

Définition *p vecteurs de E sont dits* ***linéairement indépendants*** *ssi :*
$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i . V_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$

On dit aussi que la famille de vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ est **libre**.

ex: $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \\ 3\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ L2 - 2L1' \\ L3 - 3L1' \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 0\alpha - 5\beta = 0 \\ 0\alpha - 3\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \\ -\frac{1}{5}L2' \\ L3 + 3L2' \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix}$$

La famille est libre, linéairement indépendante.

Génératrice :

Définition *On dit que la famille de vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ est* ***génératrice*** *ssi tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs : $\forall X \in E : \exists \alpha_1 ... \alpha_p$ tel que $X = \sum_{i=1} \alpha_i . V_i$.*

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i . V_i$ est appelé une décomposition de X.

ex: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ famille génératrice ?

soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

on cherche α et β tel que

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha + 2\beta = y \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ L2 - L1' \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta = y - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2x - y \\ \beta = y - x \end{cases}$$

CCL : on a trouvé α et β qui conviennent donc la famille est génératrice.

Vérif : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y - x) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ex: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ famille génératrice ?

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ \alpha + 2\beta = y \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ L2 - L1' \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ 0 = y - x \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ x = y \end{cases}$$

Le système n'admet de solution que si $x = y$, donc la famille n'est pas génératrice (de $\mathbb{R}^2$) ; elle ne génère que la droite $y = x$ dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Base :

Définition *On dit que la famille de vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ est une* **base** *de E si cette famille est libre et génératrice.*

(suite exemple en haut)

$i \Rightarrow ii$: on suppose que $V_1 - V_p$ est une base

existence : comme $V_1 - V_p$ est une base
$V_1 - V_p$ est génératrice

unicité : supposons $X = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i = \sum_{i=1}^{p} \beta_i V_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i - \beta_i) V_i = \vec{0_E}$

comme $V_1 - V_p$ libre
ceci implique $\forall i \quad \alpha_i - \beta_i = 0$
donc $\forall i \quad \alpha_i = \beta_i$
et la décomposition est bien unique.

$ii \Rightarrow i$: on suppose $\forall X \in E$
il existe une décomposition unique
$(\alpha_1 - \alpha_p)$ de X sur $V_1 - V_p$
tq $X = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i$

MQ $V_1 - V_p$ est une base

générateur : d'après E, la décomposition de $X \in E$ quelconque existe (elle est même unique)

Libre : soit $\alpha_1 - \alpha_p$ tq $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i = \vec{0_E}$

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i = \vec{0_E} = \sum_{i=1}^{p} 0 V_i$

La décomposition étant unique
$\forall i \quad \alpha_i = 0$ par définition
$V_1 - V_p$ est libre.

Dimensions :

Définition *On appelle* **dimension** *de l'espace vectoriel E le nombre de vecteurs de base .*

Définition *Soit F un sous-espace de E, on appelle base de F une famille de vecteur de F qui est libre et qui est génératrice de F tout entier.*

On peut en déduire plusieurs conséquences
Soit E un espace vectoriel de dimension n alors :

— n vecteurs indépendants de E sont forcément générateurs et forment donc une base de E.
— n vecteurs générateurs de E sont forcément libres et forment donc une base de E.
— Tout sous-espace vectoriel de E est de dimension $p \leq n$.

Rang :

Définition *Le* **rang** *d'une famille de p vecteurs est le plus grand nombre de vecteurs de la famille qui sont linéairement indépendants.*

Nous pouvons alors vérifier plusieurs propriétés sur le rang :

— Soit p vecteurs, alors leur rang est inférieur ou égal à p.
— Dans un espace de dimension n, le rang est inférieur ou égal à n.
— Le rang de p vecteurs est égal à la dimension du sous-espace vectoriel qu'il engendre.

Application linéaire :

Définition *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K. Alors $u : E \to F$ est une* ***application linéaire*** *si et seulement si :*

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(i) } \forall (X,Y) \in E^2 : u(X+Y) = u(X) + u(Y) \\ \text{(ii) } \forall (\alpha, X) \in K \times E : u(\alpha.X) = \alpha.u(X) \end{array}}$$

Image et rang :

Image :

Définition *On appelle* ***image de u*** *la partie de l'ensemble d'arrivée F qui est composée des images de vecteurs de E.*

$$Im(u) = u(E) = \{u(X) \mid X \in E\}$$
$$Im(u) = \{Y \in F \mid \exists X \in E \text{ tel que } u(X) = Y\}$$

nbre colonne → départ

dim E

nbre ligne → arrivée

Rang :

Définition *Le* ***rang de u*** *est la dimension de l'image de* ***u*** *: $Rang(u) = \dim(Imu)$*

ex : calculer le rang de l'application linéaire suivante :

$$u(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x \end{pmatrix}$$

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\left\{ u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

donc famille de rang 2 car $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est libre (les vecteurs n'étant pas proportionnels).

Donc le rang $u = 2$.

Surjective :

Proposition

u est ***surjective*** *si et seulement si $Rang(u) = \dim F$*

Noyau d'une application linéaire :

Définition *Le* ***noyau*** *d'une application linéaire noté $Ker\, u$ est l'ensemble de vecteurs de E dont l'image est le vecteur nul de F :*

$$Ker\, u = \left\{ X \in E \mid u(X) = \vec{0} \right\}$$

Injective :

Proposition

*u est **injective** si et seulement si* $Ker\, u = \left\{ \vec{0} \right\}$

Bijective :

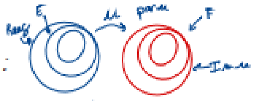
Définition *Une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.*

<u>Théorème du rang :</u>

Proposition (Théorème du rang)

Soit $u : E \to F$ *une application linéaire alors :*

$\dim(\ker u) + Rang(u) = \dim(E)$



dim E = dim Ker u + dim Im u

Ce théorème est très pratique par exemple pour calculer le rang : on commence par calculer le noyau, et en utilisant la formule, on a :

$Rang(u) = \dim(E) - \dim(\ker u)$.

(Explications de la proposition...)

Chapitre 2 : Les matrices

Matrice diagonale :

Définition *Une matrice carrée est dite **diagonale** ssi tous les éléments situés hors de la diagonale principale sont nuls.*

On doit donc avoir $\forall i, j : a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$$\text{Ainsi } M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice transposée :

Définition *On appelle **transposée** d'une matrice* $M = [a_{ij}]$ *la matrice* ${}^tM$ *composée des éléments symétriques en inversant les colonnes et les lignes et vice versa :* ${}^tM = [a_{ji}]$

(Exemple...)

$${}^t\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrice identité :

Définition *On appelle matrice **identité** la matrice diagonale dont chaque élément de la diagonale vaut 1.*

<u>Exemple :</u>

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si A d'ordre n (carré)
et I_n l'identité d'ordre n
$A \times I_n = A = I_n \times A$

Matrice triangulaire supérieur et inférieur :

Définition *Une matrice carrée est dite **triangulaire supérieure** si tous ses éléments en dessous de la diagonale sont nuls.*

$$\text{Ainsi } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ triangulaire supérieure

Définition *Une matrice carrée est dite **triangulaire inférieure** si tous ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls.*

$$\text{Ainsi } M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$ triangulaire inférieure

Déterminant d'une matrice :

Proposition *Le déterminant de n vecteurs est nul si et seulement si les n vecteurs sont linéairement dépendants.*

$Det\,(X_1,...,X_n) = 0 \Leftrightarrow (X_1,...,X_n)$ *est une famille liée.*
$Det\,(X_1,...,X_n) \neq 0 \Leftrightarrow (X_1,...,X_n)$ *est une famille libre.*

avoir autant de vec de l'espace sinon pas possible on doit plutôt utiliser les rangs

Déterminant de matrice simple

qd 1x1 on laisse crochet

— Soit M une matrice 1×1 : $\det M = \det[a] = |a| = a$

— Soit M une matrice 2×2 : $\det M = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} = a.d - b.c$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{vmatrix} = 4-6 = -2$

— Soit M une matrice 3×3

3 (Régle de Sarrus)

$$\det M = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

On répète les deux premières colonnes à la fin

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$

−
+ en produit d'abord

On a alors :

$$\det M = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

Exemple :

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3\end{matrix}$$

$1\times1\times2 + 2\times1\times3 + 4\times2\times3$
$-3\times4 - 3 - 2\times2\times2$
$= 2+6+24-12-3-8 = 8+12-8-3 = \boxed{9}$

Le calcul du déterminant est un processus itératif (pour calculer un déterminant d'une matrice d'ordre n on l'exprime en fonction de déterminant d'ordre $n-1$). Il faut développer par une ligne ou par une colonne.

Exemple : Si 2 lignes = ou 2 colonnes = alors famille lié et Det = 0

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix} = +1.\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2\end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2\end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1\end{vmatrix} = 8 - 0 - 36 = -28$$

On peut aussi développer par n'importe quelle ligne ou colonne à condition de ne pas se tromper dans le signe des cofacteurs :

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix} = -0.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2\end{vmatrix} + 4.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2\end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1\end{vmatrix} = -28$$

Comatrice : **Définition** *On appelle **matrice des cofacteurs de M** et on note $Co\,(M)$ la matrice dont les termes sont les cofacteurs (ne pas oublier les signes !!!).*

$$Co\,(M) = [A_{ij}] = \left[(-1)^{i+j}.\Delta_{ij}\right]$$

Définition *On appelle **matrice adjointe** de M et on note M^* la transposée de la comatrice*

$$\boxed{M^* = {}^tCo\,(M)}$$

Méthode de Cramer :

ex : $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\det M = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

c'est un système de Cramer.

$Mx = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = b$

X : $\det Bx = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$x = -2/6 = -1/3$

Y : $\det By = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8$

$y = 8/6 = 4/3$

Z : $\det Bz = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10$

$z = 10/6 = 5/3$ donc $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} \right\}$

Système sous déterminé : moins d'équations que d'inconnus
↳ "beaucoup de solutions"

$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ 2x+2y+2z = 3 \end{cases}$ → système incompatible $S \neq 0$

$L2 - 2L1 \begin{cases} x+y+z = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$

Système sur déterminé : plus d'équations que d'inconnus
↳ "peu de solutions"

$\begin{cases} x+y = 1 \\ 2x+2y = 2 \\ 3x+3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \{ x+y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-y \\ y = y \end{cases}$

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1-y \\ y \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R} \right\}$

$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Matrice de passage (P) : **Définition** *On appelle **matrice de passage** de A vers B, notée $P_{A \to B}$, la matrice qui permet de changer de coordonnées. Ainsi $X_A = P_{A \to B}.Y_B$.*

Matrice diagonalisable : **Définition** *Une matrice carrée A d'ordre n est dite **diagonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale D, ainsi $A = P.D.P^{-1}$ où P est une matrice de passage.* $u = \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

diagonalisable

Méthode : Méthode de diagonalisation

Soit A une matrice,

1. Résoudre $\det(A - \lambda I) = 0$ et trouver les racines : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
2. Éventuellement contrôler vos résultats avec le déterminant et la trace.
3. Pour chaque racine distincte λ_i, calculer l'espace propre associé E_{λ_i} en résolvant le système $(A - \lambda_i.I).X = \vec{0}$. (au moins dim 1)
4. En déduire des vecteurs propres qui sont des vecteurs libres de E_{λ_i}.
5. Regarder si la matrice est bien diagonalisable en vérifiant que les dimensions des espaces propres sont égales aux multiplicités des racines.
6. Si c'est le cas, donner P et D, éventuellement si on vous le demande calculer P^{-1}. on peut faire le produit PDP^{-1} pr vérifier qu'on retombe

Vecteurs propres : **Définition** *Soit u un endomorphisme, le vecteur $V \neq \vec{0}$ est un **vecteur propre** de u si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(V) = \lambda.V$*

*On dit que λ est une **valeur propre** et que V est un vecteur propre associé à λ.*

Valeurs propres : Propriétés $u(\alpha V_1 + \beta V_2) = \alpha u(V_1) + \beta u(V_2) = \alpha \lambda V_1 + \beta \lambda V_2$

— Si V est un vecteur propre, alors il est associé à une unique valeur propre λ. $V \in E_{\lambda_1}$ et $\in E_{\lambda_2}$ $u(V) = \lambda_1 V$ et $u(V) = \lambda_2 V$ $(\lambda_1 - \lambda_2)V = \vec{0}$ comme V doit $\neq 0$

— Les espaces propres sont des sous-espaces vectoriels de E (ils sont deux à deux d'intersection le vecteur nul).

(Preuves à faire...)

Polynôme caractéristique : **Définition** *On appelle **polynôme caractéristique** d'une matrice A d'ordre n et on note $P(\lambda)$ le polynôme défini par : $P(\lambda) = \det(A - \lambda.I)$ où I est l'identité d'ordre n.*

vecteur nulle peut pas ê vecteur propre

Proposition *Les valeurs propres d'une matrice A sont exactement les racines du polynôme caractéristique.*

Chapitre 3 : Fonctions de plusieurs variables