CC2 **MATHEMATIQUES** 1/

Optimisations sous contraintes

Etape 0 : on élimine les z

Etape 1 : on qualifie la contrainte et forme la matrice JACOBIENNE

$$M_J = \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \end{bmatrix}$$ → dérivé première de la contrainte

Etape 2 : on forme le Lagrangien

$\mathcal{L}(x,y,z)$ = fonction + λ (la contrainte donnée) Q1

et on cherche les points candidats et le λ associé.
↳ dérivées secondes

Etape 3 : on forme la matrice HESSIENNE

D_H ou $M_H = \begin{bmatrix} f''_x & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_y \end{bmatrix}$ → dérivé seconde Q2

et on cherche les valeurs propres

- quand la matrice HESSIENNE dépend de λ on peut toujours conclure sauf quand la matrice est indéfinie (méthode des directions) ↳ $-$
- quand la matrice HESSIENNE dépend de x et/ou y on ne peut pas conclure quand la matrice est indéfinie semi positive et semi négative (méthode des directions)

On fait la matrice HESSIENNE pour chaque points candidats et on cherche les valeurs propres

- quand 2 valeurs propres > 0 → matrice définie $+$
- quand 2 valeurs propres < 0 → matrice définie $-$
- quand 1 valeur propre > 0 et l'autre $= 0$ → matrice semi-def $+$
- quand 1 valeur propre < 0 et l'autre $= 0$ → matrice semi définie $-$
- quand 1 valeur propre > 0 et l'autre < 0 → matrice indéfinie

* si la matrice → définie ou semi-définie ⊕ → le point sera un minimum (local ou globale)

* si la matrice → définie ou semi-définie ⊖ → le point sera un maximum (local ou globale)

On regarde si le / les minimum(s) et maximum(s) trouvés sont locaux ou non.

→ on cherche les z (on prend une contrainte et on remplace x et y pour chaque point)

→ on cherche $f(x, y, z)$ en remplaçant selon chaque point dans le problème initial.

soit λ_1 ; λ_2 les valeurs propres de $D^2 f$. si $\forall (x, y)$

- $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$ → f est convexe
- $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_2 \leq 0$ → f est concave

Dans les autres cas f est ni concave ni convexe.

si f convexe → $D^2 f(x)$ semi-définie ⊕
si f concave → $D^2 f(x)$ semi-définie ⊖
si f strictement convexe → $D^2 f(x)$ définie ⊕
si f strictement concave → $D^2 f(x)$ définie ⊖

---

si f convexe → admet minimum global ssi x^* point critique
si f concave → admet maximum global ssi x^* point critique
si f strictement convexe → admet minimum global en un point unique
si f strictement concave → admet maximum global en un point unique

* Dérivée partielle première

→ par rapport à x → $\frac{\partial f}{\partial x}$ → on considère alors que y est une constante

→ par rapport à y → $\frac{\partial f}{\partial y}$ → on considère alors que x est une constante

Exemple :

$$2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$$

∂x ↙ ↘ ∂y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + y^2 + 6x - 36$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 2y$$

* Dérivée partielle seconde

On reprend les dérivées partielles premières et on fait la même chose pour chacune :

on avait $2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$

∂x ↙ ↘ ∂y

$6x^2 + y^2 + 6x - 36$

↙ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x + 6$ ↘ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y$

$2xy + 2y$

↙ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y$ ↘ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x + 2$

$\partial^2 f$ ← notation de dérivée partielle seconde

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ → dérivée par rapport à x puis x

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ → dérivée par rapport à x puis y

→ première dérivation toujours mis à droite

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ → dérivée par rapport à y puis x

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ → dérivée par rapport à y puis y

$f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = mx + k \rightarrow f'(x) = m$

$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f = k \times u \rightarrow f' = k \times u'$

$f = u + v \rightarrow f' = u' + v'$

$f = \frac{u}{v} \rightarrow f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f = u \times v \rightarrow f' = u'v + uv'$

$f = \frac{1}{v} \rightarrow f' = \frac{-v'}{v^2}$

$f = u^2 \rightarrow f' = 2u'u$

$f = (cu) \rightarrow f' = cu'$

$f = u - v \rightarrow f' = u' - v'$

$e^0 = 1 \quad e^1 = e \quad e^{-1} = \frac{1}{e}$

$(e^x)^m = e^{m \times x} \quad e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$

$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad e^{0,5} = \sqrt{e}$

$\ln(1) = 0 \quad \ln(e) = 1 \quad (e^x)' = e^x$

$e^{\ln x} = x \quad \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln(e^x) = x \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln(a^n) = n \ln a \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (e^u)' = e^u \times u' \quad (\ln(u))' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{u'}{u}$

Formule DL à l'ordre 2

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2} f''_{x^2}(a,b)(x-a)^2$$
$$+ \frac{1}{2} f''_{y^2}(a,b)(y-b)^2 + f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)$$
$$+ o((x-a)^2 + (y-b)^2)$$

Equation plan tangent à f en (1;0)

$$z = z_0 + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

SUITES RECURRENTES

Etape 0 : u_n doit être le rang le moins élevé.

Etape 1 : on cherche la solution de l'équation homogène
on cherche l'équation caractéristique : calcul du det.

- $\Delta > 0 \to u_n = \alpha(\lambda_1)^n + \beta(\lambda_2)^n$
- $\Delta = 0$ (racine double) $\to u_n = (\alpha n + \beta)(\lambda_1)^n$
- $\Delta < 0 \to u_n = \rho^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))$
  ou $u_n = \alpha(\lambda_1)^n + \beta(\lambda_2)^n$

Etape 2 : solutions particulières.

second membre polynomiale :

→ si 1 est racine de l'équation caractéristique
- le 2nd membre est un polynôme de ~~second~~ degré 0
  solution particulière : $n^\alpha \cdot Q(n)$ avec $Q(n) = k$ et
  α = multiplicité de la racine
- le 2nd membre est un polynôme de degré 1
  solution particulière : $n^\alpha \cdot Q(n)$ avec $Q(n) = kn + c$ et
  α = multiplicité de la racine.

→ si 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique
- le 2nd membre est un polynôme de degré 0
  solution particulière : $Q(n)$ avec $Q(n) = k$
- le 2nd membre est un polynôme de degré 1
  solution particulière : $Q(n)$ avec $Q(n) = kn + c$

second membre exponentiel $\to x^n$

→ si x est racine de l'équation caractéristique
  solution particulière : $k \times n^\alpha \times x^n$ et α = multiplicité de la racine.

→ si x n'est pas racine de l'équation caractéristique
  solution particulière : $k \times x^n$

Etape 3 : solution générale

Etape 4 : solution complète avec conditions initiales.
il faut trouver α et β grâce à u_0 et u_1

SYSTEME RECURRENT

Etape 1 on note X_N le vecteur de la colonne $\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix}$ X_{N+1}

on note S le système :

$\begin{pmatrix} x_{N+1} \\ y_{N+1} \\ z_{N+1} \end{pmatrix}$ S peut s'écrire sous forme matricielle

$X_{N+1} = AX_N$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{matrice du système}$$

Etape 2 on cherche les valeurs propres

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ 1 & -4-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \text{on calcul par ligne puis colonne}$$

Etape 3 on cherche les vecteurs propres

$$\alpha\lambda_1 = \dots \quad (M - \lambda I) \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 4 on calcul P et P^{-1} tel que $A = PDP^{-1}$

" Donnez les solutions explicites du système homogène en fonction des paramètres "

$$\boxed{X_N = \alpha(\lambda_1)^N V_1 + \beta(\lambda_2)^N V_2 + \gamma(\lambda_3)^N V_3}$$

avec α, β, γ des réels qui dépendent des conditions initiales

donc solution explicite du système homogène :

$$X_N = \alpha(\dots)^N \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + \beta(\dots)^N \dots$$ ← on remplace par les valeurs trouvées

" Calculez les précédents paramètres en fonction des conditions initiales x_0, y_0, z_0 ".

soit $$\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \times \quad P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow X_0 = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{on remplace les}\\ \text{valeurs de}\\ P^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{on multiplie avec}\\ \text{les } x_0,\ y_0,\ z_0\end{pmatrix}$$

ainsi α = 1re ligne

β = 2e ligne

γ = 3e ligne

" On suppose que S a 2nd membre : $B = \begin{pmatrix}8\\ 7\\ 9\end{pmatrix}$ "

on note $X_e \begin{pmatrix}x_e\\ y_e\\ z_e\end{pmatrix}$ un point d'équilibre de ce système

Ce point vérifie $\begin{cases} x_e = x_{n+1} = x_n \\ y_e = y_{n+1} = y_n \\ z_e = z_{n+1} = z_n \end{cases}$

→ résoudre le système et trouver x_e, y_e et z_e

COMPLEXES

$M(z_M)$ et $N(z_N)$ → deux points du plan

$\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z)$ → deux vecteurs du plan

$\overrightarrow{MN}$ → affixe $z_N - z_M$ $\qquad$ $k\vec{u}$ → affixe kz

$\vec{u} + \vec{v}$ → affixe $z + z'$

milieu segment $[MN]$ → affixe $z_I = \dfrac{z_M + z_N}{2}$

$\bar{z} = a + ib$ → complexe conjugué

$i^2 = -1$ → nombre imaginaire

$z = a + ib$ → nombre complexe

a = partie réelle → si $a = 0$ → présence d'un imaginaire pur

b = partie imaginaire → si $b = 0$ → réel standard

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$ $\quad z \neq 0$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ $\quad z' \neq 0$
- z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow$ module (z)

$\theta = \arg(z) =$ argument de l'angle θ

- $|z|^2 = z\bar{z}$ • $|\bar{z}| = |z|$ • $|-z| = |z|$ • $|zz'| = |z||z'|$
- $|z^n| = |z|^n$ • $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ • inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

- z nombre réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0\ [\pi]$
- z imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$

$\cos\theta = \frac{\text{coté adjct}}{\text{hypothénuse}} = \frac{a}{|z|}$

$\sin\theta = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{b}{|z|}$

$\tan\theta = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjct}}$

on sait que $z = \underbrace{a}_{|z|\cos\theta} + i\underbrace{b}_{|z|\sin\theta}$

alors

$z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$

$\underline{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$, avec $\theta = \arg(z)$

forme trigonométrique

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \rightarrow$ forme exponentielle

alors $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\theta = \arg(z)$

$= \rho \cdot e^{i\theta}$

- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ • $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ • $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ • $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ • $e^{i\pi} = -1$

forme algébrique $=$ $z = a + ib$

forme trigonométrique $=$ $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

forme exponentielle $=$ $z = |z|e^{i\theta}$ $= \rho e^{i\theta}$

D'après le théorème de Pythagore : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$

coordonnées polaires $\rightarrow \rho = |z|$ $\theta = \arg(z)$

Formule de Moivre $\rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Formule d'Euler $\rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Racines n-ième $\rightarrow z^n = \rho^n \cdot e^{ni\theta} = a + ib$ donc $a + ib = r \cdot e^{i\alpha}$

Optimisation sous contraintes

$$f(x,y,z) = x + y + z \quad sc : \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 - y^2 - z^2 = -2 \end{array}$$

→ Montrer que l'ensemble des points admissibles est $E = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y^2 + z^2 = 2\}$. → on doit donc résoudre les sous contraintes

→ $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 - y^2 - z^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ 2x^2 = 0 \end{cases}$ $L1 + L2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 = 0 \end{cases}$ → $\frac{L2}{2}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 2 & L1 - L2 \\ x = 0 \end{cases}$

donc $E = \{(0,y,z) \mid y^2 + z^2 = 2\}$

$\Leftrightarrow y^2 + z^2 - 2 = 0$

→ En déduire que le problème revient à un problème d'optimisation d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $f(x,y,z) = y + z$ avec une seule contrainte $y^2 + z^2 = 2$

?

→ Déterminer les points candidats à être minimum en utilisant le Lagrangien

?

On a $f(x,y) = -xy(4-2x+y)$

Trouvez les extrema de f et déterminez leurs nature

$f\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to -xy(4-2x+y)$

→ on développe :

$f(x,y) = -xy\ (4-2x+y)$

$= -4xy + 2x^2y - xy^2$

→ on dérive en fonction de x et en fonction de y

$f'x(x,y) = -4y + 4xy - y^2$

$f'y(x,y) = -4x + 2x^2 - 2xy$

(x,y) est un point critique ssi $\begin{cases} f'x(x,y) = 0 \\ f'y(x,y) = 0 \end{cases}$

→ donc on résoud les équations

$\begin{cases} -4y + 4xy - y^2 = 0 \\ -4x + 2x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(-4+4x-y) = 0 \\ 2x(-2+x-y) = 0 \end{cases}$

on sait que $2x = 0$ $\Leftrightarrow x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y(-4+4x-y) = 0 \\ x(-2+x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } -4+4x-y = 0 \quad (1) \\ x = 0 \text{ ou } -2+x-y = 0 \quad (2) \end{cases}$

si on prend $y=0$ et on résoud les équations du (2)

on sait que

→ $x = 0$ donc $-2+x-y = 0$

on a

→ $y = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 + 0 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 2}$ et $\boxed{x = 0}$

On a donc 2 points qui vérifient les conditions de points critiques $(0,0)$ et $(2,0)$

On fait maintenant le cas inverse on prend $x=0$ et on résoud les équations du (1)

_ par identification on a :

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n.\theta = \alpha[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = r^{1/n} \\ n\cdot\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = r^{1/n} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Résolution d'équation du 2nd degré à coef complexes

on a $az^2 + bz + c = 0$

on calcul discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

on peut mettre ce complexe sous la forme $\Delta = \rho \cdot e^{i\theta}$

on calcul les racines carrées de Δ qui sont 2 on a

β_1 et β_2 avec $\beta_2 = -\beta_1$

on voit que $\beta_1 = \sqrt{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\beta_2 = \sqrt{\rho} \cdot e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)} = -\sqrt{\rho} \cdot e^{i(\frac{\theta}{2})}$

donc $S = z_1 = \frac{-b + \beta_1}{2a}$ $\quad z_2 = \frac{-b - \beta_1}{2a}$

- Propriétés : avec $az^2 + bz + c = 0$

- si $\Delta > 0$: 2 solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$: 1 solution rélle

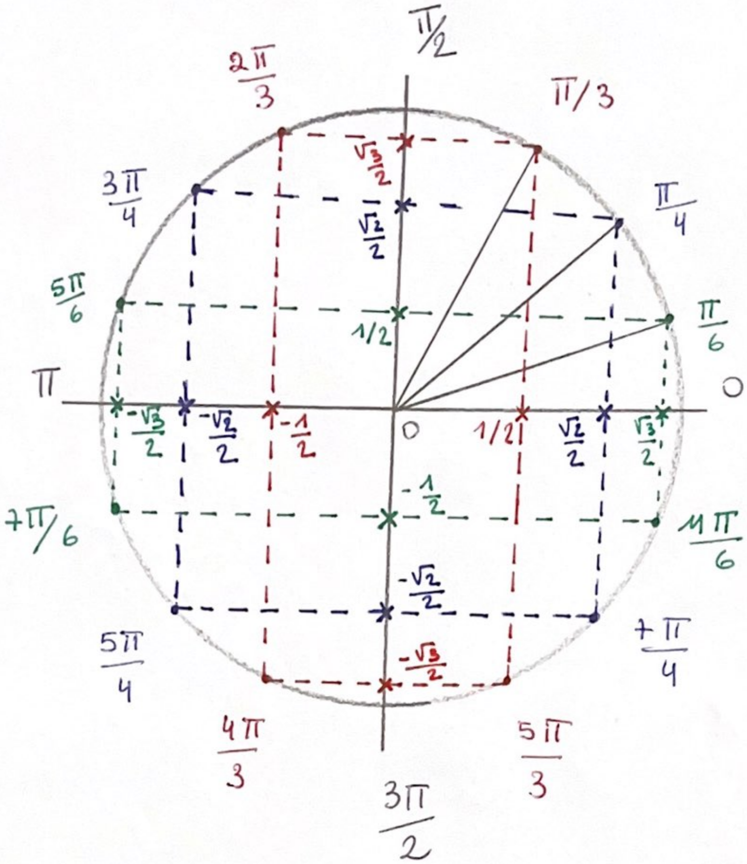
$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$: 2 solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie	0	0

à savoir par ♡



π/2
2π/3
π/3
3π/4
√2/2
√3/2
π/4
5π/6
1/2
π/6
π
0
-√3/2
-√2/2
-1/2
1/2
√2/2
√3/2
7π/6
-1/2
11π/6
-√2/2
5π/4
7π/4
-√3/2
4π/3
5π/3
3π/2