

Contrôle d'algèbre

Calculatrice, téléphone et matériels de cours/TD interdits

45 minutes

Mercredi 6 novembre 2019

Exercice 1 : Question de cours (3 points)

Soit $\mathcal{M} =$

$$\begin{bmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

Quelles sont les valeurs propres de \mathcal{M} (sans calcul, mais justifiez)? Écrivez la décomposition de \mathcal{M} sous la forme d'une matrice diagonale \mathcal{D} (à expliciter) et d'une matrice de passage P (à ne pas calculer). Expliquez sans calcul pourquoi \mathcal{M} n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 : Système linéaire paramétré (5 points)

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur de m .

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 5 \end{cases}$$

Donnez une interprétation géométrique de vos résultats.

Exercice 3 : Application linéaire (8 points)

Soit f une application de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

f est définie par les images des vecteurs de \mathcal{B} :

$$f(\vec{e}_1) = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = -3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_3) = -4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$$

- Quelle est la matrice représentative de f , \mathcal{M}_f dans la base \mathcal{B} ? Écrire f sous la forme $f(x, y, z)$. Justifiez que f est une application linéaire.
- Déterminez $\text{Ker } f$ et sa base. Quelle est sa dimension? Donnez une interprétation géométrique.
- Trouvez le rang de f et une base de $\text{Im } f$. Vérifiez votre résultat avec le théorème du rang.
- f est-elle injective, surjective, bijective?
- Diagonalisez \mathcal{M}_f et déterminez ses espaces propres : On donne $\det \mathcal{M}_f = 0$. Qu'en déduisez-vous? Montrez que $P(\lambda) = \lambda(\lambda - a)(\lambda - b)$, a et b sont à déterminer. Classez les valeurs propres par ordre décroissant. Les vecteurs propres sont à déterminer tel que la première composante non-nulle soit 1. Exprimer \mathcal{M}_f en fonction d'une matrice diagonale \mathcal{D} et d'une matrice de passage \mathcal{P} . Calculez l'inverse de \mathcal{P} .

Exercice 4 : Fonction de deux variables (4 points)

Soit $f(x, y) = e^{\sqrt{x+y^3}}$.

- Quel est le domaine de définition \mathcal{D}_f de f ?
- Calculez le gradient de f .
- Calculez les dérivées secondes partielles de f .